Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

"Controlabilidad exacta interna para la ecuación semilineal del calor"

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Luz Teresa QUISPE VEGA

ASESOR

Victor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima, Perú

2018

CONTROLABILIDAD EXACTA INTERNA PARA LA ECUACIÓN SEMILINEAL DEL CALOR

Luz Teresa Quispe Vega

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para obtener el Grado académico de Magister en Matemática Pura.

Aprobado por:

Dr. Oswaldo Napoleón Ramos Chumpitaz

Presidente

Roxana López C.

Dra. Roxana López Cruz

Miembro

Yolanda

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Miembro

Dr. José Raúl Luyo Sanchéz

Miembro

Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini

Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

QUISPE VEGA, LUZ TERESA

Controlabilidad Exacta Interna para la Ecuación Semilineal del Calor, (Lima) 2018. VIII.,90p., 29.7 cm (UNMSM, Magister, Matemática Pura, 2018) Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas. Unidad de Posgrado, UNMSM/FCM.

Dedicatoria

A mi amada familia Javier, Mateo y Carolina.

Agradecimientos

A mi esposo Javier por su amor incondicional, paciencia y gran apoyo. A mis amados padres María y Alejandro que a pesar de la distancia siempre me alentaban a conseguir mis metas.

A mi asesor el Dr. Victor Rafael Cabanillas Zaninni, por sus enseñanzas, su paciencia, su constante apoyo y sobre todo su amistad.

A la Dra. Roxana López Cruz, por sus consejos, sugerencias y apoyo moral.

Al Dr. José Luyo y a la Dra. Yolanda Santiago por sus observaciones y sugerencias que me sirvieron para la culminación de este trabajo de tesis.

A mis amigas, la profesora Gregoria Ramón, Martha Timoteo y Carole Huamán, por su aliento moral, apoyo y amistad incondicional.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo estudiaremos el problema de la controlabilidad exacta en el interior del dominio Ω asociado a la ecuación semilineal parabólica

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y) = h & , \text{ en } \quad Q \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases}$$

Demostraremos que para cada estado inicial $y^0 \in L^2(\Omega)$ y cada estado final $z^0 \in L^2(\Omega)$, es posible encontrar una función control $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ que al actuar sobre el sistema conduzca al estado $y(x, t)$ hacia el estado final z^0 en el tiempo T. Además, demostraremos que el control h es Lipschitz continuo sobre los estados finales y estudiaremos el comportamiento de h cuando f tiende a cero. En la parte final del trabajo estudiaremos algunas aplicaciones del teorema principal, por ejemplo a los modelos semilineales de Fisher, Kierstead, Slobodkin y Skellam, Fisher - KPP y Jin - ichi-Nagumo.

Palabras clave. Controlabilidad exacta, ecuación semilineal parabólica, método de la expansión del dominio, Teorema de Minty-Browder, operador monótono.

Abstract

In this work we will study the problem of the exact controllability within the Ω domain associated with the parabolic semilinear equation

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y) = h & , \text{ in } Q \\ y = 0 & , \text{ on } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ in } \Omega \end{cases}$$

We will show that for each initial state $y^0 \in L^2(\Omega)$ and each final state $z^0 \in L^2(\Omega)$, it is possible to find a control function $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ that acting on the system leads to the state $y(x, t)$ towards the final state z^0 at time T. In addition, we will show that the control h is Lipschitz continuous on the final states and we will study the behavior of h when f tends to zero. In the final part of the work we will study some applications of main theorem, for example to the semilinear models of Fisher, Kierstead, Slobodkin and Skellam, Fisher - KPP and Jin - ichi-Nagumo.

Keywords. Exact controllability, parabolic semilinear equation, domain expansion method, Minty-Browder Theorem, monotone operator.

Introducción

En las últimas décadas, la teoría del control ha ganado gran importancia como disciplina para ingenieros, matemáticos y otros científicos. Ejemplos de problemas de control van desde casos sencillos, como la conducción del calor a través de una barra, hasta casos más complejos como el control de la trayectoria de una ecuación diferencial, el control de una variable económica, el control de una epidemia, etc. En los últimos años se ha estudiado la controlabilidad de sistemas parabólicos no lineales (semilineales, superlineales, fuertemente no lineales, etc.). Si la solución de un sistema puede conducirse hacia un estado deseado tan cerca como se quiera, entonces estamos ante la *controlabilidad aproximada* del sistema. Por otra parte, la *controlabilidad exacta* indicará que la solución puede conducirse exactamente hasta un estado deseado. Fabre, Puel y Zuazua [9], realizaron un estudio sobre la controlabilidad aproximada para la ecuación semilineal del calor sobre un dominio acotado Ω cuando el control actúa sobre cualquier subconjunto abierto no vacío de Ω o en alguna parte de la frontera. Cuando la función control actúa sobre el interior del dominio Ω se dice que es un *control interno*, pero si actúa sobre la frontera Γ de Ω es llamado *control frontera*. Para ambos controles la controlabilidad aproximada en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < +\infty$ fue probada en [9] cuando la no linealidad es globalmente Lipschitz. Otras referencias sobre controlabilidad aproximada son los trabajos de V. Cabanillas [5] y [6].

En el presente trabajo estudiaremos la controlabilidad exacta interna para la ecuación semilineal del calor.

Sea Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente regular $\Gamma = \partial\Omega$ (de clase C^2). Dado $T > 0$, denotemos por $Q = \Omega \times (0, T)$ el cilindro generado por Ω y por $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ su frontera lateral. Consideremos la ecuación semilineal del calor

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y) = h\chi_\omega & , \text{ en } \quad Q \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

Asumiremos la siguiente hipótesis sobre f

(H) La función $f = f(t, y)$ es continua en $t \in [0, T]$ y globlalmente Lipschitz continua en $y \in \mathbb{R}$, es decir, existe una constante $\ell > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \ell \, |y_1 - y_2| \quad , \quad \forall \; y_1, y_2 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

En el sistema (1), la función $h = h(x, t)$ se denomina la *función control*. Por y' denotamos la derivada distribucional de la función y con respecto a la variable temporal t.

Definición 0.1 *Decimos que el sistema (1) es exactamente controlable en* $L^2(\Omega)$ *en el tiempo* $T > 0$, *si para cualquier estado inicial* y^0 *y cualquier estado final* $z^0 \in L^2(\Omega)$ *existe una función control* $h(x, t) = h(x, t, y^0, z^0) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ *tal que la solución* y *de (1) con* $\omega = \Omega$ *satisface*

$$y(x, T) = z^0.$$

J. L. Lions [14] demostró que si ω es un subconjunto propio de Ω, la controlabilidad exacta interna para la ecuación lineal del calor es imposible, lo mismo sucede con la controlabilidad interna en una ecuación semilineal del calor si ω es un subconjunto propio de Ω.

En este trabajo, probaremos que el sistema (1) es exactamente controlable siguiendo las ideas del artículo [16] de W. Liu y G. Williams.

Con el objetivo de lograr una presentación didáctica del problema, hemos organizado nuestra tesis de la siguiente manera: en el capítulo 1 presentaremos algunos resultados y herramientas del Análisis Funcional que serán utilizados en los capítulos siguientes. En el capítulo 2 formulamos el problema de control para la ecuación parabólica semilineal

$$y' - \Delta y + f(y) = h$$

estableciendo las hipótesis sobre el dominio Ω y la función f del término no lineal. Este capítulo constituye la parte central del trabajo pues en él enunciamos y denotamos el teorema principal acerca de la controlabilidad exacta de nuestro problema, utilizando el teorema de Minty-Browder y el método de la expansión del dominio. En el capítulo 3 estudiaremos el comportamiento de la función control h cuando la función f tiende a cero. Como consecuencia de los teoremas demostrados en el capítulo 2, hemos demostrado en el capítulo 4 la aplicabilidad de estos resultados a algunos modelos semilineales como los de Fisher, Kierstead, Slobodkin y Skellam, Fisher - KPP y Jin - ichi-Nagumo. En la parte final del trabajo inclumos las conclusiones de la tesis así como las referencias bibliográficas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notaciones

Representaremos el conjunto de los números naturales con la letra $\mathbb{N}$. Dado $n \geq 1$ los elementos de $\mathbb{N}^n$ serán llamados multi-índices. Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos el orden de α como

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \ ,$$

y la derivada parcial de la función u de orden α de la siguiente forma

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Si $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ entonces $D^0 u = u$.

1.2. Soporte de una función

Definición 1.1 Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, se define *el soporte de* u, como la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ y se representa por

$$Sop(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

1.3. El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ de las funciones de prueba

Definición 1.2 Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, se dice que φ pertenece al espacio $C_0^\infty(\Omega)$, si φ admite derivadas parciales continuas de cualquier orden en Ω y tanto φ como sus derivadas se anulan fuera de un compacto de Ω.

Definición 1.3 Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con la siguiente noción de convergencia:

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se dice que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si satisface las siguientes condiciones:

a. Existe un conjunto compacto fijo K en Ω tal que

$$Sop(\varphi_n) \subseteq K \quad , \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

b. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la sucesión $\{D^\alpha \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de las derivadas de orden α de φ_n converge uniformemente a $D^\alpha\varphi$ sobre el compacto K, esto es

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi_n(x) - D^\alpha\varphi(x)| \to 0 \quad , \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

1.4. Espacios $L^p(\Omega)$

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n, 1 \leq p < \infty$. Se denota por $L^p(\Omega)$ al espacio vectorial de todas las funciones (clases de equivalencia) Lebesgue-medibles u

definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

es decir

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denotaremos al espacio vectorial de todas las funciones (clases de equivalencia) Lebesgue-medibles, esencialmente acotadas, definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1

a. Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

b. Si $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x \in \Omega}{supess} |u(x)|,$$

donde $\underset{x \in \Omega}{supess} |u(x)| = \text{ínf}\{k \geq 0;\ |u(x)| \leq k,\ c..t.p.\ x \in \Omega\}$.

c. Si $1 \leq p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio separable.

d. Si $1 < p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio reflexivo.

e. Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Demostración. Ver Adams [1]. ■

Definición 1.4 Dados los espacios normados X y Y, diremos que X está *continuamente inmerso* en Y, si X es subconjunto de Y y existe una constante positiva C tal que

$$\|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X \ ,$$

para todo $u \in X$, donde C es la constante de inmersión, en tal caso denotamos $X \hookrightarrow Y$.

Teorema 1.1 *Si Ω es acotado y $1 \leq p \leq q < \infty$ entonces $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

Demostración. Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.2 (Desigualdad de Hölder) *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ tal que p y q son exponentes conjugados. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ entonces*

$$uv \in L^1(\Omega)$$

y

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\,\|v\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Demostración. Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.3 (Desigualdad de Hölder generalizada) *Sean las funciones $f_1, f_2, \ .\ .\ .\ , f_k$ tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ donde $1 \leq i \leq k$ con*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ .\ .\ .\ \frac{1}{p_k} \leq 1$$

.

Entonces

$$f = f_1 ... f_k \in L^p(\Omega)$$

y

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)} .$$

Demostración. Ver Brezis [4] . ■

1.5. Espacio de Distribuciones

Definición 1.5 *Una distribución sobre* Ω *es una aplicación lineal* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *la cual es continua sobre* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.6 *Decimos que* T *es continua sobre* $\mathcal{D}(\Omega)$ *si para toda sucesión* $\{\varphi_v\}_{v\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, *tal que* $\varphi_v \to \varphi$ *en* $\mathcal{D}(\Omega)$, *cuando* $v \to \infty$, *se tiene que* $\langle T, \varphi_v\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ *en* $\mathbb{R}$.

Observación 1.1 *Sea* $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Entonces se define la distribución* T_f *como*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definición 1.7 *Sea* T *una distribución, definimos la derivada distribucional de orden* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *de* T *por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha\varphi\rangle \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observación 1.2 *Sea* T_f *una distribución definida por* $f \in L^p(\Omega)$, *entonces la derivada de orden* α *está definida por*

$$\langle D^\alpha T_f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definición 1.8 *Sea* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *y* $f \in L^2(\Omega)$, *se dice que* $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ *en el sentido de las distribuciones si existe* $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x) dx \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$\mathcal{D}'(\Omega)$ *es el espacio vectorial de las distribuciones, el cual es el dual topológico de espacio* $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.6. Espacios de Sobolev

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$, definimos el espacio

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ ,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

Entonces

$$\left(W^{m,p}(\Omega), \|\ .\ \|_{W^{m,p}(\Omega)} \right)$$

es un espacio de Banach, denominado *espacio de Sobolev.*

Cuando $p = 2$, el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es denotado por $H^m(\Omega)$.

Definición 1.1 *Se denota por* $H^m(\Omega)$ *el espacio de todas las funciones* $u \in L^2(\Omega)$ *tales que para todo* $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ *siendo* $D^\alpha u$ *la derivada de* u *en el sentido de las distribuciones. Esto es*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall\ |\alpha| \leq m \right\}$$

Observación 1.3

a. *El espacio* $H^m(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall\; u,v \in H^m(\Omega).$$

b. *Cuando* $m = 1$ *tenemos el espacio* $H^1(\Omega)$*, definido por*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)\,; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\; i = 1,2,\;...\;,n \right\}$$

c. *Cuando* $m = 0$ *entonces* $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

d. *El espacio de las funciones de prueba* $C_0^\infty(\Omega)$ *es denso en el espacio* $L^p(\Omega)$*, pero no es verdad que* $C_0^\infty(\Omega)$ *sea denso en* $W^{m,p}(\Omega)$ *para* $m \geq 1$*, por esa razón, se define el espacio* $W_0^{m,2}(\Omega)$ *como la cerradura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *en* $W^{m,p}(\Omega)$*, esto es*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

e. *Cuando* $p = 2$ *se escribe* $H_0^m(\Omega)$ *en lugar de* $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Definición 1.9 *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $1 < q \leq \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Se denota el dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *. Esto es*

$$(W_0^{m,p}(\Omega))' = \{f : W_0^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}; f \text{es lineal y continua}\}$$

En particular, el dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ *se denota por* $H^{-m}(\Omega)$.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Poincaré) *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *acotado en la dirección* x_i*. Entonces*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \tag{1.1}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ *donde* $pr_i\Omega \subset (a,b)$ *.*

Demostración. Primero demostraremos que la desigualdad (1.1) se cumple para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y finalmente aplicaremos la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$.

Consideremos inicialmente $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ entonces

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)ds \quad , \quad a \leq t \leq b$$

$$|\varphi(t)| = \left|\int_a^t \varphi'(s)ds\right| = \left|\int_a^t 1\varphi'(s)ds\right| \quad , \quad a \leq t \leq b$$

aplicando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq \left(\int_a^t |1|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^t |\varphi'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (t-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^t |\varphi'(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elevando al cuadrado tenemos

$$|\varphi(t)|^2 \leq (t-a)\int_a^t |\varphi'(s)|^2 ds \leq (b-a)\int_a^b |\varphi'(t)|^2 dt$$

integrando con respecto a $t \in [a,b]$ tenemos

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \leq (b-a)^2 \int_a^b |\varphi'(t)|^2 dt \tag{1.2}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que Ω es acotado en la dirección x_1. Consideremos la notación $x = (t, x')$ donde $t = x_1$, $x' = (x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$ y sea $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ entonces

$$\int_\Omega |\varphi(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_a^b |\varphi(t,x')|^2 dt\right) dx' \tag{1.3}$$

observemos que $\psi_{x'}(t) = \varphi(t,x') \in C_0^\infty(a,b)$ para cada $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Luego tomando $\psi_{x'}(t)$ en la desigualdad (1.2) tenemos

$$\int_a^b |\varphi(t,x')|^2 dt \leq (b-a)^2 \int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x')\right|^2 dt$$

considerando esta desigualdad en (1.3) tenemos

$$\int_{\Omega} |\varphi(t)|^2 dt \leq (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x') \right|^2 dt \right) dx' = (b-a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_n \to u \quad , \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \to \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad , \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

Luego (1.1) queda probado para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. ■

Observación 1.4 Por los argumentos usados en la demostración del Teorema 1.4 se obtiene que

$$L : H_0^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega) \quad con \quad L = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

es una isometría lineal. En particular

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \quad con \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

es una isometría lineal.

Definición 1.10 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con su frontera $\partial\Omega$*

1.7. Conjuntos abiertos bien regulares

A continuación, definiremos el concepto de conjunto abierto bien regular.

Inicialmente fijaremos algunas notaciones.

Sea Q un rectángulo abierto:

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < y_i < 1 \ , \ i = 1, 2, ..., n-1, \ \ -1 < y_n < 1\}$$

Q^+ y Q^- son cuadrados abiertos

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\}$$

$$Q^- = Q \cap \{y_1 < 0\}$$

Y el segmento abierto

$$\Sigma = Q \cap \{y_n = 0\} .$$

Definición 1.11 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que Ω es de clase C^m , $m = 1, 2, ...$ si su frontera Γ es una variedad de clase C^m de dimensión $n-1$ y ubicada localmente al mismo lado de Ω.*

Si Ω es de clase C^m entonces existe un sistema de cartas locales (U_j, φ_j) , $j = 1, 2...$ definiendo Γ tal que

U_j es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y los U_j cubren Γ

$\varphi_j : U_j \to Q$ es una biyección de clase C^m

$\varphi_j^{-1} : Q \to U_j$ es de clase C^m

$\varphi_j(U_j \cap \Omega) = Q^+, \ \ \varphi_j(U_j \cap \Gamma) = \Sigma$

Definición 1.12 *Se dice que Ω es bien regular si es de clase C^m para todo $m = 1, 2...$*

Definición 1.13 *Se dice que Ω es un dominio de Lipschitz o dominio con frontera de Lipschitz, si su frontera es suficientemente regular, en el sentido de* *que esta es localmente la gráfica de una función lipschitziana, es decir, para cada $x \in \partial\Omega$ existe una bola $B(x)$, tal que $B(x) \cap \Omega$ es el gráfico de una función lipschitziana.*

1.8. Operadores monótonos y el teorema de Minty-Browder

Definición 1.14 Sea X un espacio de Banach, X' su espacio dual, $\langle ., . \rangle_{X' \times X}$ la dualidad entre X' y X y $F : X \to X'$ un operador. Entonces

a. F es llamado *monótono* si y solo si

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle_{X' \times X} \geq 0 \quad , \quad \forall\, u, v \in X$$

b. F es llamado *estrictamente monótono* si y solo si

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle_{X' \times X} > 0 \quad , \quad \forall\, u, v \in X \ , \ u \neq v$$

c. F es llamado *fuertemente monótono* si y solo si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle_{X' \times X} \geq \alpha \, \|u - v\|_X^2 \quad , \quad \forall\, u, v \in X$$

d. F es llamando *hemicontinuo* si y solo si $t \mapsto \langle F(u + tv), w \rangle_{X' \times X}$ es continua en $t \in [0, 1]$ para todos los valores de $u, v, w \in X$.

e. F es llamado *coercivo* si y solo si

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle F(u), u\rangle_{X'\times X}}{\|u\|} = +\infty$$

Observación 1.5 La monotonicidad fuerte implica la coercividad.

Teorema 1.5 (Minty-Browder) *Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $F : X \to X'$ un operador monótono, coercivo y hemicontinuo. Entonces F es un operador sobreyectivo. Si F es fuertemente monótono entonces el operador inverso $F^{-1} : X' \to X$ es Lipschitz continuo.*

Demostración. Ver E. Zeidler [27]. ∎

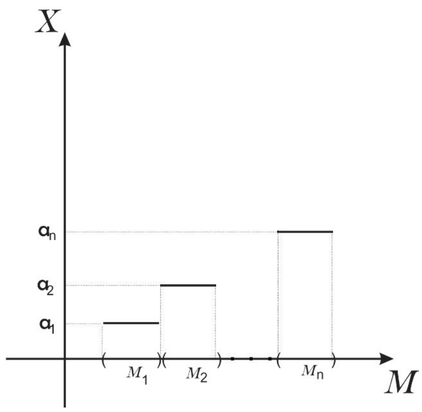
1.9. Espacios $L^p(0, T; X)$

Sea X un espacio de Banach.

Definición 1.15 Dada la función $f : M \subseteq \mathbb{R} \to X$, diremos que f es una *función simple* si existen $M_1, M_2, ..., M_k$ subconjuntos de M con $\mu(M_i) < \infty$ y $a_1, a_2, ..., a_k$ vectores en X tales que

$$f(x) = \begin{cases} a_i & , \quad x \in M_i \\ 0 & , \quad x \notin M_i \end{cases}$$

Gráficamente tenemos



Definición 1.16 Dada una función simple $f : M \subseteq \mathbb{R} \to X$, donde M es medible, definimos la *integral vectorial de Lebesgue* de f por

$$\int_M f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(M_i)$$

Definición 1.17 Dada una función $f : M \subseteq \mathbb{R} \to X$ diremos que f es *integrable en el sentido de Lebesgue* si existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n : M \subseteq \mathbb{R} \to X$ de funciones simples, tal que

a. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad c.t.p. \quad x \in M.$

b. Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ n, m \geq n_0$ *se tiene*

$$\int_M \|f_n(x) - f_m(x)\|_X \, dx < \varepsilon$$

Si estas dos condiciones son satisfechas, definimos la integral *de* f *sobre* M *según Lebesgue por*

$$\int_M f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)dx$$

Definición 1.18 Sean X un espacio de Banach y $m = 0, 1, 2, ...$, denotaremos por $C^m([0,T];X)$ al espacio de todas las funciones continuas $u : [0,T] \to X$ tales que sus derivadas $u^{(k)} : [0,T] \to X$ también son continuas para $k = 0,1,2,...,m$.

Esto es

$$C^m([0,T];X) = \left\{u : [0,T] \to X;\ u^{(k)} \in C([0,T];X),\ k = 0,1,2,...,m\right\}$$

Además el espacio $C^m([0,T];X)$ con la norma

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \sum_{k=0}^{m} \max_{0\leq t\leq T} \left\|u^{(k)}(t)\right\|_X$$

es un espacio de Banach.

Definición 1.19 Sean X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$, el conjunto $L^p(0,T;X)$ es la colección de todas las funciones $u : (0,T) \to X$ medibles tales que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty$$

entonces el conjunto

$$L^p(0,T;X) = \left\{u : (0,T) \to X;\ \ u \text{ es medible },\ \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty\right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

es un espacio de Banach.

Cuando $p = \infty$, definimos

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{supess}_{0<t<T} \|u(t)\|_X$$

Proposición 1.2 *Sean $m = 0,1,...$ y $1 \leq p < \infty$. Si X y Y son espacios de Banach, entonces* *a. El conjunto de las funciones simples* $u : [0,T] \to X$ *es denso en* $L^p(0,T;X)$.

b. La inmersión $C^m([0,T]\,;X) \hookrightarrow L^p(0,T;X)$ *es densa y continua.*

c. Si X *es un espacio de Hilbert con producto interno* $(\ .\ ,\ .\ )_X$*, entonces* $L^2(0,T;X)$ *es también un espacio de Hilbert con producto interno*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \, dt, \ \ \forall \ u,v \in L^2(0,T;X)$$

d. Si $1 \le p < \infty$ *y* X *un espacio de Banach separable, entonces* $L^p(0,T;X)$ *es separable.*

e. Si $1 < p < \infty$ *y* X *un espacio de Banach reflexivo, entonces* $L^p(0,T;X)$ *es reflexivo.*

f. Si $X \hookrightarrow Y$ *entonces*

$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y), \quad 1 \le p \le r \le \infty$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

Proposición 1.3 *Sean* $u \in L^p(0,T;X)$*,* $v \in L^q(0,T;X')$ *con* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, entonces se cumple la desigualdad*

$$\int_0^T \left|\langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X}\right| dt \le \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X'}^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

Proposición 1.4 *Sea* X *un espacio de Banach separable y reflexivo. Si* $1 < p < \infty$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, entonces* *a. Para cada* $v \in L^q(0,T;X')$ *existe un único funcional* $\overline{v} \in (L^p(0,T;X))'$ *tal que*

$$\langle \overline{v}, u\rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X' \times X}\, dt \quad , \quad \forall\ u \in\ L^p(0,T;X)$$

b. Para cada $\overline{v} \in (L^p(0,T;X))'$ *existe un único* $v \in L^q(0,T;X')$ *tal que*

$$\langle \overline{v}, u\rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X' \times X}\, dt \quad , \quad \forall\ u \in\ L^p(0,T;X)$$

y además

$$\|\overline{v}\|_{(L^p(0,T;X))'} = \|v\|_{L^q(0,T;X')}$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

Observación 1.6 La aplicación $T : L^q(0,T;X') \to (L^p(0,T;X))'$ que a cada $v \in L^q(0,T;X')$ hace corresponder el elemento $\overline{v} \in (L^p(0,T;X))'$ que existe según la primera parte de la proposición anterior, resulta ser un isomorfismo isométrico. Luego, podemos identificar los espacios

$$(L^p(0,T;X))' \equiv L^q(0,T;X')$$

de la Proposición 1.4. Así, tenemos

$$v \leftrightarrow \overline{v}$$

con esta identificación, la dualidad

$$\langle \overline{v}, u\rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)}$$

sería escrita como

$$\langle v, u\rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X' \times X}\, dt \quad , \quad \forall u \in\ L^p(0;T;X)$$

y

$$\|\upsilon\|_{(L^p(0,T;X))'} = \left(\int_0^T \|\upsilon(t)\|_{X'}^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Si X fuese un espacio de Hilbert, entonces $X' \equiv X$ por lo tanto

$$(L^p(0,T;X))' \equiv L^q(0,T;X') \equiv L^q(0,T;X).$$

En particular si $p = 2$ y $q = 2$ se tiene

$$L^2(0,T;X) \equiv \big(L^2(0,T;X)\big)' \equiv L^2(0,T;X')$$

es por eso que el espacio dual $(L^2(0,T;X))'$ se trata indistintamente como si fuese el espacio $L^2(0,T;X)$.

Ahora veamos algunos resultados que relacionan los límites, productos internos e integrales en los espacios $L^p(0,T;X)$.

Proposición 1.5 *Sea X es un espacio de Banach reflexivo y separable, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$ y $0 \leq t \leq T < \infty$. Entonces se cumple que*

a. Si $u \in L^p(0,T;X)$ entonces

$$\left\langle \overline{\upsilon}, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_{X' \times X} = \int_0^t \langle \overline{\upsilon}, u(s) \rangle_{X' \times X} \, ds \quad , \quad \forall\ \overline{\upsilon} \in X', 0 \leq t \leq T$$

b. $u \in L^p(0,T;X')$ entonces

$$\left\langle \int_0^t u(s)ds, \upsilon \right\rangle_{X' \times X} = \int_0^t \langle u(s), \upsilon \rangle_{X' \times X} \, ds \quad , \quad \forall\, \upsilon \in X', 0 < t \leq T$$

c. Si $u_n \to u$ en $L^p(0,T;X)$ cuando $n \to \infty$ entonces

$$\int_0^t u_n(s)ds \to \int_0^t u(s)ds \quad , \quad \forall\, 0 < t \leq T$$

d. *Si*

$$u_n \to u \quad en \quad L^p(0,T;X) \quad cuando \quad n \to \infty$$

$$\upsilon_n \rightharpoonup \upsilon \quad en \quad L^q(0,T;X') \quad cuando \quad n \to \infty$$

entonces

$$\int_0^t \langle \upsilon_n(s), u_n(s) \rangle_{X' \times X} \, ds \to \int_0^t \langle \upsilon(s), u(s) \rangle_{X' \times X} \, ds$$

e. *Si*

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \quad L^p(0,T;X), \quad cuando \quad n \to \infty$$

$$\upsilon_n \to \upsilon \quad en \quad L^q(0,T;X') \quad cuando \quad n \to \infty$$

entonces

$$\int_0^t \langle \upsilon_n(s), u_n(s) \rangle_{X' \times X} \, ds \to \int_0^t \langle \upsilon(s), u(s) \rangle_{X' \times X} \, ds$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

Lema 1.1 (Lema Variacional) *Sea* $u \in L^1(0,T;X)$*, siendo* X *un espacio de Banach cualquiera, tal que*

$$\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T)$$

entonces

$$u = 0 \quad , \quad en \ L^1(0,T;X)$$

es decir

$$u(t) = 0 \quad , \quad c.t.p. \ en \ (0,T).$$

Demostración. Ver Zeidler [27] ■

1.10. Terna de evolución

Llamaremos *terna de evolución* a la siguiente estructura:

i) V es un espacio de Banach real reflexivo y separable.

ii) H es un espacio de Hilbert real.

iii) La inmersión $V \hookrightarrow H$ es continua y densa.

Bajo estas condiciones diremos que los espacios V y H determinan una terna de evolución. En tal caso denotaremos esta terna por

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'.$$

1.11. Derivadas generalizadas

Definición 1.20 Dado $u \in L^1(0,T;X)$ diremos que $v \in L^1(0,T;Y)$ es la *derivada generalizada* de orden n de u, si se cumple

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^T v(t)\varphi(t)dt$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Denotaremos $v(t) = u^{(n)}(t)$.

Proposición 1.6 *Sean $u \in L^1(0,T;X)$ y $v, w \in L^1(0,T;Y)$. Si $u^{(n)} = v$ y $u^{(n)} = w$, entonces $v = w$ en $L^1(0,T;Y)$*

Demostración. Como $u^{(n)} = v$ entonces

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^T v(t)\varphi(t)dt \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T) \tag{1.4}$$

Como $u^{(n)} = w$ entonces

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^T w(t)\varphi(t)dt \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T). \tag{1.5}$$

De (1.4)-(1.5) tenemos

$$\int_0^T (v(t) - w(t))\,\varphi(t)dt = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T). \tag{1.6}$$

Por el lema variacional tenemos

$$v - w = 0 \quad \text{en} \quad L^1(0,T;Y)$$

Por lo tanto,

$$v = w \quad \text{en} \quad L^1(0,T;Y),$$

lo cual termina la prueba. ■

Proposición 1.7 *Sean X y Z espacios de Banach tales que $X \hookrightarrow Z$ además $1 \leq p, q < \infty$. Supongamos que*

i. $u_k \rightharpoonup u$ *en* $L^p(0,T;X)$;

ii. $u_k^{(n)} \rightharpoonup v$ *en* $L^q(0,T;Z)$.

Entonces $v = u^{(n)}$ *en* $L^1(0,T;Z)$.

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

Proposición 1.8 *Sea $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ una terna de evolución y $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < T < \infty$. Entonces*

a. Para $u \in L^p(0,T;V)$ la derivada generalizada $u^{(n)}$ en única.

b. Dada $u \in L^p(0,T;V)$ existe la derivada generalizada $u^{(n)} \in L^q(0,T;V')$ si y solo si existe $w \in L^q(0,T;V')$ tal que

$$\int_0^T (u(t),v)_H\, \varphi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^T \langle w(t),v\rangle_{V'\times V}\, \varphi(t)dt$$

para todo $v \in V$ y para todo $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. En tal caso tenemos $u^{(n)} = w$ además

$$\frac{d^n}{dt^n}(u(t),v)_H = \langle w(t),v\rangle_{V'\times V}$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

1.12. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(0,T;V,H)$

Proposición 1.9 *Sea $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ una terna de evolución y sea $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $0 < T < \infty$. Entonces*

a. El espacio $W^{1,p}(0,T;V,H)$ es el conjunto de todas las funciones $u \in L^p(0,T;V)$ que tienen derivadas generalizadas tal que

$$u' \in L^q(0,T;V').$$

Este espacio con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V')}$$

es un espacio de Banach

b. La inmersión de $W^{1,p}(0,T;V,H) \hookrightarrow C([0,T];H)$ es continua. Esto quiere decir que, si $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ entonces existe una única función *continua* $u_1 : [0, T] \to H$ *la cual coincide en casi todo punto de* $[0, T]$ *con la función* u*. En adelante escribiremos* u *en lugar de* u_1*. Además se cumple*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq c \|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)} .$$

c. *El conjunto de los polinomios* $w : [0, T] \to V$ *definidos por* $w(t) = \sum_i t^i a_i$ *con* $a_i \in V$*, para todo* i*, es denso en los espacios* $W^{1,p}(0, T; V, H)$*,* $L^p(0, T, V)$ *y* $L^p(0, T; H)$*.*

d. *Para todo* $u, v \in W^{1,p}(0, T; V, H)$ *y* s, t *arbitrarios tales que* $0 \leq s \leq t \leq T$ *se cumple*

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \left(\langle u', v \rangle_{V' \times V} + \langle v', u \rangle_{V' \times V} \right) dt.$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

1.13. Ecuación lineal de primer orden abstracta

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u \in W^{1,2}(0, T; V, H) \\ \dfrac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = \langle b(t), v \rangle_{V' \times V} \\ u(0) = u^0 \in H \end{cases} \tag{1.7}$$

donde asumiremos que la ecuación $(1.7)_2$ es válida para todo $v \in V$ y para todo $t \in (0, T)$. Para precisar se asumirá que existe un subconjunto Z de $(0, T)$ de medida nula tal que la ecuación $(1.7)_2$ es válida para todo $v \in V$ y todo $t \in (0, T) - Z$. Notemos que Z es independiente de v. Además $\dfrac{d}{dt}$ en $(1.7)_2$

representa las derivada generalizada sobre $(0,T)$, es decir, podemos escribir $(1.7)_2$ como

$$-\int_0^T (u(t),v)_H\varphi'(t)dt+\int_0^T a(u(t),v)\varphi(t)dt=\int_0^T \langle b(t),v\rangle_{V'\times V}\varphi(t)dt \quad (1.8)$$

para todo $\varphi\in C_0^\infty(0,T)$.

Definición 1.21 Decimos que u es *solución débil* de (1.7) si cumple $(1.7)_2$ y (1.8).

Asumiremos las siguientes hipótesis:

(H_1) $V\hookrightarrow H\hookrightarrow V'$ es una terna de evolución con $dimV=\infty$, $0<T<\infty$, donde los espacios V y H son espacios reales de Hilbert.

(H_2) La aplicación $a:V\times V\to\mathbb{R}$ es bilineal, acotada y fuertemente monótona. Además supondremos que $u_0\in H$ y $b\in L^2(0,T;V')$

(H_3) $\{w_1,w_2,...\}$ es una base en V y $\{u_{0n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de H tal que

$$u_{0n}\to u_0,\quad \text{cuando}\quad n\to\infty$$

donde

$$u_{0n}\in gen\{w_1,w_2,...\},\quad \forall n\geq 1$$

Para formular el método de Galerkin, tomamos

$$u_n(t)=\sum_{k=1}^n c_{kn}(t)w_k\quad ;\quad u_{0n}=\sum_{k=1}^n \alpha_{kn}w_k$$

Por definición, para todo $t\in(0,T)$ la aproximación de Galerkin del problema (1.7) es

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^n c'_{kn}(t)(w_k,w_j)_H+c_{kn}(t)a(w_k,w_j)=\langle b(t),w_j\rangle_V\\ c_{jn}(0)=\alpha_{jn},\quad j=1,...,n\end{cases} \quad (1.9)$$

Si en la ecuación $(1.7)_1$ reemplazamos u por u_n y v por w_j resulta la ecuación $(1.9)_1$.

Teorema 1.6 *Si (H_1), (H_2) y (H_3) son válidas, entonces :*

a. La ecuación (1.7) tiene una única solución débil $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$.

b. La aplicación $(u_0, b) \longmapsto u$ es lineal y continua de $H \times L^2(0,T;V')$ a $W^{1,2}(0,T;V,H)$, es decir, existe una constante $D > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,2}(0,T;V,H)} \leq D \left(\|u_0\|_H + \|b\|_{L^2(0,T;V')} \right)$$

para todo $u_0 \in H$ y $b \in L^2(0,T;V')$.

c. Para todo $n = 1, 2, \ldots$, la aproximación de Galerkin (1.9) tiene exactamente una solución $u_n \in W^{1,2}(0,T;V,H)$. La solución u_n converge a la solución u de (1.7) cuando $n \to \infty$ en el siguiente sentido

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad en \quad L^2(0,T;V)$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq t\leq T} \|u_n(t) - u(t)\|_H = 0$$

Demostración. Ver Zeidler [27]. ■

Capítulo 2

Controlabilidad del problema

2.1. Introducción

En este capítulo probaremos la controlabilidad exacta interna para la ecuación semilineal del calor. Demostraremos que el sistema

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y) = h\chi_\omega & , \text{ en } \quad Q \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

es exactamente controlable en $L^2(\Omega)$, en el tiempo T, es decir, dado un estado final $z^0 \in L^2(\Omega)$ es posible encontrar una función control h que al actuar sobre el sistema conduzca al estado $y(x,t)$ hacia el estado terminal z^0 en el tiempo T, para eso es necesario que la no linealidad f sea Lipschitz continua. Además probaremos que el control h de (2.1) es Lipschitz continuo con respecto a los estados terminales y estudiaremos el comportamiento de h cuando f tiende a cero, esto se tratará en el capitulo 3. Para esto, utilizaremos el *Método de los*

Operadores Monótonos. La idea de este método consiste en construir un operador no lineal monótono y continuo mediante el acoplamiento de una ecuación lineal con una ecuación semilineal del calor y luego aplicar el teorema sobreyectivo de Minty-Browder de la Teoría de Operadores Monótonos.

2.2. Construcción del operador no lineal

Consideremos el siguiente problema de valor inicial y frontera retrógrado en el tiempo:

dado un estado final $u^T \in L^2(\Omega)$, determinar la existencia de una función $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u' + \Delta u = 0 & , \text{ en } \quad Q \\ u = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ u(x, T) = u^T(x) & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

En relación al problema (2.2) los siguientes resultados son válidos:

Lema 2.1 *El operador Δ es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0.*

Demostración. Ver Pazy [21]. ■

Lema 2.2

a. *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de tipo Lipschitz. Entonces para todo $u^T \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u = u(x, t)$ de (2.2) tal que*

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por otra parte

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|u^T\right\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall\ t \in [0,T]$$

b. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ de clase C^2. Entonces para todo $u^T \in D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, existe una única solución $u = u(x,t)$ de (2.2) con

$$u \in C\left([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$$

Por otra parte, existe una constante $C > 0$ independiente de T tal que

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left\|u^T\right\|_{H^2(\Omega)} \quad , \quad \forall\ t \in [0,T]$$

Demostración. Ver Pazy [21]. ■

Proposición 2.1 *Sea $f : [t_0,T] \times X \to X$ continua en $t \in [t_0,T]$ y uniformemente Lipschitz continua (con constante L) sobre X. Si $-A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0, entonces para cada $u_0 \in X$ existe una única solución débil $u \in C([t_0,T]\,;X)$ del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t,u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Además la aplicación $u_0 \to u$ de X en $C([t_0,T]\,;X)$ es Lipschitz continua.

Demostración. Ver Pazy [21]. ■

Para $u^T \in D(\Delta)$ existe una única solución $u \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ del problema (2.2). Utilizando esta solución u y cualquier $y^0 \in L^2(\Omega)$ fijo, consideremos el siguiente problema

$$
\begin{cases}
y' - \Delta y + f(t,y) = u - \Delta u & , \text{ en } \quad Q \\
y = 0 & , \text{ sobre } \ \Sigma \\
y(0) = y^0 & , \text{ en } \quad \Omega
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

donde $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real que satisface la hipótesis (H) que establecimos en la introducción del presente trabajo. Es decir:

(H) La función $f = f(t,y)$ es continua en $t \in [0,T]$ y globlalmente Lipschitz en la variable $y \in \mathbb{R}$, es decir, existe una constante $\ell > 0$ tal que

$$
|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \ell \, |y_1 - y_2| \quad , \quad \forall \ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \tag{2.4}
$$

Como $u \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, entonces $u - \Delta u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Luego, de acuerdo a la hipótesis (H) y por la Proposición 2.1 el problema (2.3) admite una única solución $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

De esta manera, fijando un estado inicial $y^0 \in L^2(\Omega)$, podemos definir el operador no lineal

$$
F(y^0, \cdot) : D(\Delta) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)
$$

por

$$
F(y^0, u^T) = y(x,T), \tag{2.5}
$$

donde $y(x,T)$ representa la solución $y = y(x,t)$ de (2.3) evaluada en $t = T$.

El operador F actúa de la siguiente manera: fijado un estado inicial $y^0 \in L^2(\Omega)$, para cada estado final $u^T \in D(\Delta)$, resolvemos el problema (2.2). Con la solución u de (2.2) y el dato inicial $y^0 \in L^2(\Omega)$ resolvemos el problema (2.3) obteniendo una solución $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Entonces definimos

$$F(y^0, u^T) = y(x,T)$$

es decir, la solución de (2.3) evaluada en $t = T$. Debido a la unicidad de las soluciones de los sistemas (2.2) y (2.3), la aplicación $F : D(\Delta) \to L^2(\Omega)$ está bien definida.

2.3. Lipschitzianidad del operador no lineal F

Demostraremos que el operador F definido por (2.5) es Lipschitz continuo y fuertemente monótono.

Lema 2.3 *Asumiendo que la hipótesis (H) es válida, el operador F definido en (2.5) es Lipschitz continuo, es decir, existe una constante positiva $c = c(T)$ tal que*

$$\left\|F(y_2^0, u_2^T) - F(y_1^0, u_1^T)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(\left\|y_2^0 - y_1^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|u_2^T - u_1^T\right\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{2.6}$$

para cualquier $u_2^T, u_1^T \in D(\Delta)$ y cualquier $y_2^0, y_1^0 \in L^2(\Omega)$.

Demostración. Sean u_1, u_2 soluciones de (2.2) con sus respectivos estados terminales $u_1^T, u_2^T \in D(\Delta)$ y sean y_1 y y_2 soluciones de (2.3) correspondientes a u_1, y_1^0 y u_2, y_2^0 respectivamente. Entonces tenemos

$$\begin{cases} y_1' - \Delta y_1 + f(t, y_1) = u_1 - \Delta u_1 & , \text{ en} \quad \text{en } Q \\ y_1 = 0 & , \text{ sobre} \quad \text{sobre } \Sigma \\ y_1(x,0) = y_1^0 & , \text{ en} \quad \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} y_2' - \Delta y_2 + f(t, y_2) = u_2 - \Delta u_2 & , \text{ en} \quad \text{en } Q \\ y_2 = 0 & , \text{ sobre} \quad \text{sobre } \Sigma \\ y_2(x,0) = y_2^0 & , \text{ en} \quad \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) obtenemos

$$\begin{cases} (y_2 - y_1)' - \Delta(y_2 - y_1) + f(t, y_2) - f(t, y_1) = (u_2 - u_1) - \Delta(u_2 - u_1) & , \text{ en } Q \\ y_2 - y_1 = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ (y_2 - y_1)(x,0) = y_2^0 - y_1^0 & , \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Multiplicando la ecuación (2.9) por $y_2 - y_1$ e integrando sobre $Q_t = \Omega \times (0, t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (y_2 - y_1)'(y_2 - y_1) dxds - \int_{Q_t} \Delta(y_2 - y_1)(y_2 - y_1) dxds + \\ + \int_{Q_t} [f(t, y_2) - f(t, y_1)](y_2 - y_1) dxds \\ = \int_{Q_t} (u_2 - u_1)(y_2 - y_1) dxds - \int_{Q_t} \Delta(u_2 - u_1)(y_2 - y_1) dxds \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aplicando la identidad de Green tenemos

$$-\int_{Q_t} \Delta(y_2 - y_1)(y_2 - y_1) dxds = \int_{Q_t} |\nabla(y_2 - y_1)|^2 \, dxds \tag{2.11}$$

$$-\int_{Q_t} \Delta(u_2 - u_1)(y_2 - y_1) dxds = \int_{Q_t} \nabla(u_2 - u_1).\nabla(y_2 - y_1) dxds \tag{2.12}$$

además

$$\int_0^t (y_2 - y_1)'(y_2 - y_1) ds = \frac{1}{2} |y_2(t) - y_1(t)|^2 - \frac{1}{2} \left| y_2^0 - y_1^0 \right|^2 \tag{2.13}$$

remplazando (2.11), (2.12) y (2.13) en (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|y_2^0-y_1^0\right|^2dx+\int_{Q_t}|\nabla(y_2-y_1)|^2\,dxds\\
&=\int_{Q_t}(u_2-u_1)(y_2-y_1)dxds+\int_{Q_t}\nabla(u_2-u_1).\nabla(y_2-y_1)dxds-\\
&\qquad-\int_{Q_t}[f(t,y_2)-f(t,y_1)](y_2-y_1)dxds. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Pero

$$\int_{Q_t}(u_2-u_1)(y_2-y_1)dxds\le\frac{1}{2}\int_{Q_t}(|u_2-u_1|^2+|y_2-y_1|^2)dxds \qquad (2.15)$$

$$\int_{Q_t}\nabla(u_2-u_1).\nabla(y_2-y_1)dxds\le\frac{1}{2}\int_{Q_t}(|\nabla(u_2-u_1)|^2+|\nabla(y_2-y_1)|^2)dxds \quad (2.16)$$

además como f es Lipschitz continua, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_t}|f(t,y_2)-f(t,y_1)|\,(y_2-y_1)dxds&\le\int_{Q_t}\ell\,|y_2-y_1|\,|y_2-y_1|\,dxds\\
&\le\int_{Q_t}\ell\,|y_2-y_1|^2\,dxds. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando (2.15), (2.16) y (2.17) en (2.14) tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|y_2^0-y_1^0\right|^2dx+\int_{Q_t}|\nabla(y_2-y_1)|^2\,dxds\\
&\le\frac{1}{2}\int_{Q_t}(|u_2-u_1|^2+|y_2-y_1|^2)dxds+\int_{Q_t}\ell\,|y_2-y_1|^2\,dxds\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int_{Q_t}(|\nabla(u_2-u_1)|^2+|\nabla(y_2-y_1)|^2)dxds\\
&=\frac{1}{2}\int_{Q_t}(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2)dxds+\frac{1}{2}\int_{Q_t}|y_2-y_1|^2\,dxds+\\
&\qquad+\int_{Q_t}\ell\,|y_2-y_1|^2\,dxds+\frac{1}{2}\int_{Q_t}|\nabla(y_2-y_1)|^2\,dxds
\end{aligned}$$

luego, agrupando convenientemente

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{Q_t}|\nabla(y_2-y_1)|^2\,dxds$$
$$\le\frac{1}{2}\int_{Q_t}(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2)dxds+\int_{Q_t}\frac{1}{2}(2\ell+1)\,|y_2-y_1|^2\,dxds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|y_2^0-y_1^0\right|^2dx \tag{2.18}$$

de donde

$$\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx\le\int_{Q_t}(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2)dxds+\int_{\Omega}\left|y_2^0-y_1^0\right|^2dx$$
$$+\int_0^t(2\ell+1)\left[\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx\right]ds \tag{2.19}$$

como $Q_t\subset Q$ tenemos

$$\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx\le\int_{Q}(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2)dxds+\int_{\Omega}\left|y_2^0-y_1^0\right|^2dx+ \tag{2.20}$$
$$+\int_0^t(2\ell+1)\left[\int_{\Omega}|y_2-y_1|^2\,dx\right]ds.$$

Debido a la forma de la última desigualdad, podemos aplicar la desigualdad de Gronwall en (2.20) y así obtenemos

$$\int_{\Omega}|y_2(t)-y_1(t)|^2\,dx\le e^{(2\ell+1)t}\left(\int_{Q}(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2)dxdt+\int_{\Omega}\left|y_2^0-y_1^0\right|^2dx\right) \tag{2.21}$$

Recordemos que, si u es solución de (2.2), aplicando el Teorema 1.6, existe una constante positiva D tal que

$$\|u\|_{W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))}\le D\left\|u^T\right\|_{L^2(\Omega)}$$

es decir

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\le D\left\|u^T\right\|_{L^2(\Omega)}$$

la cual se puede escribir como

$$\int_Q (|u|^2 + |\nabla u|^2) dxdt \leq D^2 \left\| u^T \right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.22}$$

Como u_1 y u_2 son soluciones de (2.2) con estados terminales u_1^T y u_2^T , entonces $u_2 - u_1$ es solución de (2.2) con estado final $u_2^T - u_1^T$. Entonces, por (2.22) tenemos

$$\int_Q (|u_2 - u_1|^2 + |\nabla (u_2 - u_1)|^2) dxdt \leq D^2 \left\| u_2^T - u_1^T \right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.23}$$

Ahora, aplicando (2.23) en (2.21) tenemos

$$\int_\Omega |y_2(t) - y_1(t)|^2 \, dx \leq e^{(2\ell+1)t} \left(D^2 \left\| u_2^T - u_1^T \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| y_2^0 - y_1^0 \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

como $t \in [0, T]$, para $t = T$ tenemos

$$\int_\Omega |y_2(T) - y_1(T)|^2 \, dx \leq e^{(2\ell+1)T} \left(D^2 \left\| u_2^T - u_1^T \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| y_2^0 - y_1^0 \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

tomando $k = \text{máx} \left\{ e^{(2\ell+1)T} D^2, e^{(2\ell+1)T} \right\}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |y_2(T) - y_1(T)|^2 \, dx &\leq k \left(\left\| u_2^T - u_1^T \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| y_2^0 - y_1^0 \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\ &< k \left(\left\| u_2^T - u_1^T \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| y_2^0 - y_1^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \end{aligned}$$

como $F(y^0, u^T) = y(x, T)$ tenemos

$$\int_\Omega \left| F(y_2^0, u_2^T) - F(y_1^0, u_1^T) \right|^2 dx \leq k \left(\left\| u_2^T - u_1^T \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| y_2^0 - y_1^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2$$

Es decir, hemos probado que

$$\left\| F(y_2^0, u_2^T) - F(y_1^0, u_1^T) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{k} \left(\left\| u_2^T - u_1^T \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| y_2^0 - y_1^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \right), \tag{2.24}$$

lo cual termina la demostración. ■

2.4. Extensión del operador F

Usando el Lema 2.3 y un argumento de densidad, para cualquier $y^0 \in L^2(\Omega)$, el operador $F(y^0, .)$ se puede extender a $L^2(\Omega)$. Veamos, sea $u^T \in L^2(\Omega)$, como $D(\Delta)$ es denso en $L^2(\Omega)$ existe una sucesión $\left\{u_n^T\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\Delta)$ tal que

$$u_n^T \to u^T \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)$$

Por el Lema 2.3, el operador F es Lipschitz continuo, luego es uniformemente continuo. Por consiguiente $\left\{F(y^0, u_n^T)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$, y por la completitud de $L^2(\Omega)$, converge a un elemento de $L^2(\Omega)$. Definimos

$$\lim_{n\to\infty} F(y^0, u_n^T) = F(y^0, u^T) \tag{2.25}$$

Ahora demostraremos que la extensión de $F(y^0, .)$ también es Lipschitz continua. Sean u_1^T, $u_2^T \in L^2(\Omega)$ entonces existen $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\Delta)$ tales que

$$\varphi_n \to u_1^T \quad , \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

$$\psi_n \to u_2^T \quad , \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

Entonces para cualquier y_1^0, $y_2^0 \in L^2(\Omega)$, aplicando (2.24) se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|F(y_2^0, u_2^T) - F(y_1^0, u_1^T)\right\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \left\|F(y_2^0, \psi_n) - F(y_1^0, \varphi_n)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} c(\left\|y_2^0 - y_1^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_n - \varphi_n\|_{L^2(\Omega)}) \\
&= c(\left\|y_2^0 - y_1^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|u_2^T - u_1^T\right\|_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}$$

En adelante, F será considerado como un operador definido en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

2.5. Monotonía del operador F

Para probar la monotonicidad fuerte de $F(y^0, .)$ para cualquier $y^0 \in L^2(\Omega)$ fijo necesitamos la tasa de decaimiento exponencial de las soluciones de la ecuación del calor.

Lema 2.4 *Sea u la solución de (2.2) correspondiente al estado final u^T. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |u(t)|^2 \; dx \leq e^{-\delta(T-t)} \int_\Omega |u(T)|^2 \, dx \quad \textit{para} \quad t \in [0,T] \tag{2.26}$$

Demostración. Notemos que, para $\delta > 0$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\delta(T-t)} \int_\Omega |u(t)|^2 \, dx\right] = -\delta e^{\delta(T-t)} \int_\Omega |u(t)|^2 \, dx + e^{\delta(T-t)} \int_\Omega 2u(t)u'(t)dx. \tag{2.27}$$

Por (2.2) tenemos que

$$u' = -\Delta u \tag{2.28}$$

multiplicando (2.28) por u e integrando sobre Ω y aplicando la identidad de Green obtenemos

$$\int_\Omega u(t)u'(t)dx = \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx.$$

Luego, reemplazando en (2.27), tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\delta(T-t)} \int_\Omega |u(t)|^2 \, dx\right] = 2e^{\delta(T-t)} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx - \delta e^{\delta(T-t)} \int_\Omega |u(t)|^2 \, dx.$$

Por la desigualdad de Poincaré, existe $\beta > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \beta \, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

luego

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\delta(T-t)}\int_\Omega |u(t)|^2\,dx\right] \geq 2e^{\delta(T-t)}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx - \delta e^{\delta(T-t)}\beta\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx$$

$$= (2-\delta\beta)e^{\delta(T-t)}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx.$$

Si tomamos $0 < \delta < \dfrac{2}{\beta}$ entonces por la desigualdad anterior, tenemos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\delta(T-t)}\int_\Omega |u(t)|^2\,dx\right] > 0$$

por lo tanto, la función $t \longmapsto e^{\delta(T-t)}\displaystyle\int_\Omega |u(t)|^2\,dx$ es creciente y como $t \leq T$ obtenemos

$$e^{\delta(T-t)}\int_\Omega |u(t)|^2\,dx \leq e^{\delta(T-T)}\int_\Omega |u(T)|^2\,dx,$$

es decir,

$$\int_\Omega |u(t)|^2\,dx \leq e^{-\delta(T-t)}\int_\Omega |u(T)|^2\,dx, \qquad t\in[0,T]$$

lo cual prueba (2.26) ■

Lema 2.5 *Asumamos que la hipótesis* (H) *es válida. Supongamos que* ℓ *o* T *es tan pequeño que*

$$M(\ell,T) = 1 + \frac{\ell^2}{2\ell+1}(1-e^{(2\ell+1)T}) > 0 \tag{2.29}$$

Entonces para cualquier $y^0 \in L^2(\Omega)$ *el operador* $F(y^0,.) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *es fuertemente monótono.*

Demostración. Sean u_1, u_2 soluciones de (2.2) con sus respectivos estados terminales $u_1^T, u_2^T \in D(\Delta)$, multiplicando la ecuación (2.9) por $u_2 - u_1$, e integrando sobre $Q = \Omega \times (0,T)$, teniendo en cuenta que $y_2^0 = y_1^0 = y^0$ obtenemos

$$\int_Q (y_2 - y_1)'(u_2 - u_1)dxdt - \int_Q \Delta(y_2 - y_1)(u_2 - u_1)dxdt +$$

$$+ \int_Q [f(t,y_2) - f(t,y_1)](u_2 - u_1)dxdt$$

$$= \int_Q (u_2 - u_1)(u_2 - u_1)dxdt - \int_Q \Delta(u_2 - u_1)(u_2 - u_1)dxdt$$

aplicando la identidad de Green tenemos

$$\int_Q (y_2 - y_1)'(u_2 - u_1)dxdt + \int_Q \nabla(y_2 - y_1).\nabla(u_2 - u_1)dxdt$$

$$= \int_Q (u_2 - u_1)(u_2 - u_1)dxdt + \int_Q \nabla(u_2 - u_1).\nabla(u_2 - u_1)dxdt -$$

$$- \int_Q [f(t,y_2) - f(t,y_1)](u_2 - u_1)dxdt$$

$$= \int_Q |u_2 - u_1|^2 dxdt + \int_Q |\nabla(u_2 - u_1)|^2 dxdt -$$

$$- \int_Q [f(t,y_2) - f(t,y_1)](u_2 - u_1)dxdt \tag{2.30}$$

pero

$$\int_Q (y_2 - y_1)'(u_2 - u_1)dxdt = \int_\Omega \left(\int_0^T (y_2 - y_1)'(u_2 - u_1)dt \right) dx$$

$$= \int_\Omega [y_2(T) - y_1(T)]\,(u_2^T - u_1^T)dx -$$

$$- \int_\Omega \left(y_2^0 - y_1^0\right)(u_2^0 - u_1^0)dx -$$

$$- \int_Q (y_2 - y_1)(u_2 - u_1)'dxdt$$

como $y_2^0 = y_1^0$ y $(u_2 - u_1)' = -\Delta(u_2 - u_1)$ y aplicando la identidad de Green tenemos

$$\int_Q (y_2 - y_1)'(u_2 - u_1)dxdt = \int_\Omega [y_2(T) - y_1(T)]\,(u_2^T - u_1^T)dx -$$

$$- \int_Q \nabla(y_2 - y_1).\nabla(u_2 - u_1)dxdt \tag{2.31}$$

luego, reemplazando (2.31) en (2.30) tenemos

$$\int_{\Omega} [y_2(T) - y_1(T)] (u_2^T - u_1^T) dx = \int_Q (|u_2 - u_1|^2 + |\nabla(u_2 - u_1)|^2) dxdt - \\ - \int_Q [f(t, y_2) - f(t, y_1)] (u_2 - u_1) dxdt \tag{2.32}$$

pero f es Lipschitz continua, entonces

$$\begin{aligned}\int_Q [f(t, y_2) - f(t, y_1)] (u_2 - u_1) dxdt &\leq \int_Q \ell |y_2 - y_1| |u_2 - u_1| dxdt \\ &\leq \frac{\ell^2}{2} \int_Q |y_2 - y_1|^2 dxdt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_Q |u_2 - u_1|^2 dxdt\end{aligned} \tag{2.33}$$

y además de (2.21) tenemos

$$\int_{\Omega} |y_2 - y_1|^2 dx \leq e^{(2\ell+1)t} \left(\int_Q (|u_2 - u_1|^2 + |\nabla(u_2 - u_1)|^2) dxdt \right) \tag{2.34}$$

pues $y_1^0 = y_2^0$.

Ahora, integrando (2.34) de 0 a T tenemos

$$\begin{aligned}\int_Q |y_2 - y_1|^2 dxdt &\leq \int_Q (|u_2 - u_1|^2 + |\nabla(u_2 - u_1)|^2) dxdt. \int_0^T e^{(2\ell+1)t} dt \\ &= \frac{e^{(2\ell+1)T} - 1}{2\ell + 1} \int_Q (|u_2 - u_1|^2 + |\nabla(u_2 - u_1)|^2) dxdt\end{aligned} \tag{2.35}$$

reemplazando (2.35) en (2.33) tenemos

$$\int_Q [f(t, y_2) - f(t, y_1)] (u_2 - u_1) dxdt \leq \\ \leq \frac{\ell^2 \left(e^{(2\ell+1)T} - 1 \right)}{2 (2\ell + 1)} \int_Q \left(|u_2 - u_1|^2 + |\nabla(u_2 - u_1)|^2 \right) dxdt + \frac{1}{2} \int_Q |u_2 - u_1|^2 dxdt \tag{2.36}$$

luego reemplazando (2.36) en (2.32) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}[y_2(T)-y_1(T)]\,(u_2^T-u_1^T)dx\\
&\geq \int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt-\frac{1}{2}\int_Q|u_2-u_1|^2\,dxdt-\\
&\quad-\frac{\ell^2\left(e^{(2\ell+1)T}-1\right)}{2\,(2\ell+1)}\int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt\\
&=\int_Q|\nabla(u_2-u_1)|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_Q|u_2-u_1|^2\,dxdt-\\
&\quad-\frac{\ell^2\left(e^{(2\ell+1)T}-1\right)}{2\,(2\ell+1)}\int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt\\
&\geq\frac{1}{2}\int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt-\\
&\quad-\frac{\ell^2\left(e^{(2\ell+1)T}-1\right)}{2\,(2\ell+1)}\int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt\\
&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\ell^2}{2\ell+1}(1-e^{(2\ell+1)T})\right]\int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

como $y(x,T)=F(y^0,u^T)$ y denotando $M(\ell,T)=1+\dfrac{\ell^2}{2\ell+1}(1-e^{(2\ell+1)T})$ en (2.37) obtenemos

$$
\int_{\Omega}\left[F(y^0,u_2^T)-F(y^0,u_1^T)\right](u_2^T-u_1^T)dx\geq\frac{1}{2}M(\ell,T)\int_Q\left(|u_2-u_1|^2+|\nabla(u_2-u_1)|^2\right)dxdt \tag{2.38}
$$

Por otra parte

$$
(u_2-u_1)'+\Delta(u_2-u_1)=0. \tag{2.39}
$$

Multiplicando (2.39) por u_2-u_1 e integrando sobre $Q=\Omega\times(0,T)$ tenemos

$$
\int_Q(u_2-u_1)'(u_2-u_1)dxdt+\int_Q\Delta(u_2-u_1)(u_2-u_1)dxdt=0
$$

y aplicando la identidad de Green una vez más, obtenemos:

$$
\int_Q|\nabla(u_2-u_1)|^2\,dxdt=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left|u_2^T-u_1^T\right|^2dx-\left|u_2^0-u_1^0\right|^2\right)dx. \tag{2.40}
$$

Luego, reemplazando (2.40) en (2.38) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[F(y^0,u_2^T)-F(y^0,u_1^T)\right](u_2^T-u_1^T)dx\\
&\geq \frac{1}{2}M(\ell,T)\left[\int_Q |u_2-u_1|^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\left|u_2^T-u_1^T\right|^2-\left|u_2^0-u_1^0\right|^2\right)dx\right]
\end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\int_\Omega \left[F(y^0,u_2^T)-F(y^0,u_1^T)\right](u_2^T-u_1^T)dx \geq \frac{1}{4}M(\ell,T)\int_\Omega\left(\left|u_2^T-u_1^T\right|^2-\left|u_2^0-u_1^0\right|^2\right)dx \tag{2.41}$$

Por el Lema 2.4 y tomando $t=0$, tenemos

$$\int_\Omega \left|u_2^0-u_1^0\right|^2 dx \leq e^{-\delta T}\int_\Omega \left|u_2^T-u_1^T\right|^2 dx. \tag{2.42}$$

Reemplazando (2.42) en (2.41) tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[F(y^0,u_2^T)-F(y^0,u_1^T)\right](u_2^T-u_1^T)dx\\
&\geq \frac{1}{4}M(\ell,T)\left(\int_\Omega \left|u_2^T-u_1^T\right|^2 dx-e^{-\delta T}\int_\Omega \left|u_2^T-u_1^T\right|^2 dx\right)\\
&=\frac{1}{4}M(\ell,T)(1-e^{-\delta T})\int_\Omega \left|u_2^T-u_1^T\right|^2 dx
\end{aligned}$$

es decir

$$\int_\Omega \left[F(y^0,u_2^T)-F(y^0,u_1^T)\right](u_2^T-u_1^T)dx \geq \frac{1}{4}M(\ell,T)(1-e^{-\delta T})\int_\Omega \left|u_2^T-u_1^T\right|^2 dx \tag{2.43}$$

denotando $\alpha=\dfrac{1}{4}M(\ell,T)(1-e^{-\delta T})$ en (2.43) tenemos

$$\int_\Omega \left[F(y^0,u_2^T)-F(y^0,u_1^T)\right](u_2^T-u_1^T)dx \geq \alpha\int_\Omega \left|u_2^T-u_1^T\right|^2 dx \tag{2.44}$$

podemos ver que (2.44) es válido para $u_1^T,u_2^T\in D(\Delta)$, ahora demostraremos que (2.44) también es válido para $u_1^T,u_2^T\in L^2(\Omega)$.

Sean $u_1^T, u_2^T \in L^2(\Omega)$, entonces existen sucesiones $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\Delta)$ tales que

$$\varphi_n \to u_1^T \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$\psi_n \to u_2^T \text{ en } L^2(\Omega).$$

Además, por la definición del operador F en (2.25) tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[F(y^0, u_2^T) - F(y^0, u_1^T)\right](u_2^T - u_1^T)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left[F(y^0, \psi_n) - F(y^0, \varphi_n)\right](\psi_n - \varphi_n)dx \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \alpha \int_\Omega |\psi_n - \varphi_n|^2 \, dx \\
&= \alpha \int_\Omega |u_2(T) - u_1(T)|^2 \, dx = \alpha \left\|u_2^T - u_1^T\right\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

es decir

$$\left\langle F(y^0, u_2^T) - F(y^0, u_1^T), u_2^T - u_1^T \right\rangle_{(L^2(\Omega))' \times L^2(\Omega)} \geq \alpha \left\|u_2^T - u_1^T\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u_1^T, u_2^T \in L^2(\Omega)$.

Por lo tanto, el operador F es fuertemente monótono. ■

Observación 2.1 Una función $f(t, y)$ que verifica las condiciones de los Lemas 2.3 y 2.5 es

$$f\,(t, y) = \lambda t \, sen\, y$$

f(t,y)=λtseny

donde λ es tan pequeño que $1 + \dfrac{\lambda^2 T^2}{2\lambda T + 1}(1 - e^{(2\lambda T+1)T}) > 0$.

El Lema 2.5 muestra que la constante ℓ debe ser lo suficientemente pequeña para que F sea fuertemente monótona. Este inconveniente se superará, introduciendo el *método de expansión del dominio* en la prueba del teorema principal del presente trabajo, el cual enunciaremos a continuación.

2.6. El resultado principal

En esta sección presentamos y demostramos el teorema que garantiza la controlabilidad de nuestro problema. Consideremos el problema (2.1) con control h, es decir

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y) = h\chi_\omega & , \text{ en } \quad Q \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases}$$

Teorema 2.1 *Supongamos que la hipótesis (H) es válida. Entonces existe $T_0 > 0$ tal que para $0 < T \leq T_0$ el sistema (2.1) es exactamente controlable en $L^2(\Omega)$ en el tiempo T, es decir, para cualquier estado inicial y^0 y cualquier estado final $z^0 \in L^2(\Omega)$ existe una función control interno $h(x,t) = h(x,t,y^0,z^0) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que la solución y de (2.1) con $\omega = \Omega$ satisface*

$$y(x,T) = z^0 \tag{2.45}$$

Además, para cualquier $y^0 \in L^2(\Omega)$ fijo, la función control

$$\Phi : L^2(\Omega) \to L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

$$z^0 \longmapsto \Phi(z^0) = h(x,t,y^0,z^0)$$

es Lipschitz continua.

Demostración. Para $\tau > 0$, introduciremos una función f_τ definida por

$$f_\tau(t,u) = \frac{1}{\tau^2} f(\frac{t}{\tau^2}, u) \tag{2.46}$$

Definamos también el dominio

$$\Omega(\tau) = \{\tau x;\ x \in \Omega\}$$

y los conjuntos

$$Q_1(\tau) = \Omega(\tau) \times (0,1)$$

$$\Sigma_1(\tau) = \partial\Omega(\tau) \times (0,1) = \{(\tau x, t); (x,t) \in \Gamma \times (0,1)\}$$

en lugar de (2.2) y (2.3) consideraremos los sistemas

$$\begin{cases} u' + \Delta u = 0 & , \text{ en } \quad Q_1(\tau) \\ u(x,1) = u^1(x) & , \text{ en } \quad \Omega(\tau) \\ u = 0 & , \text{ sobre } \quad \Sigma_1(\tau) \end{cases} \tag{2.47}$$

y

$$\begin{cases} w' - \Delta w + f_\tau(t,w) = u - \Delta u & , \text{ en } \quad Q_1(\tau) \\ w(x,0) = w^0(x) & , \text{ en } \quad \Omega(\tau) \\ w = 0 & , \text{ sobre } \quad \Sigma_1(\tau) \end{cases} \tag{2.48}$$

donde

$$w^0(x) = y^0(\frac{x}{\tau}) \quad , \quad x \in \Omega(\tau) \tag{2.49}$$

Entonces el operador F definido por (2.5) se convierte en

$$F(w^0, u^1) = w(x,1). \tag{2.50}$$

Para f_τ, la constante ℓ de (H) ahora es $\dfrac{\ell}{\tau^2}$, veamos

$$|f_\tau(t,u_2) - f_\tau(t,u_1)| = \left|\frac{1}{\tau^2}f(\frac{t}{\tau^2},u_2) - \frac{1}{\tau^2}f(\frac{t}{\tau^2},u_1)\right| \leq \frac{\ell}{\tau^2}|u_2-u_1| \tag{2.51}$$

reemplazando $\dfrac{\ell}{\tau^2}$ en la constante M definida por (2.29) tenemos

$$M(\frac{\ell}{\tau^2},1) = 1 + \frac{\ell^2}{\tau^2(2\ell+\tau^2)}\left(1 - exp\left(\frac{2\ell+\tau^2}{\tau^2}\right)\right) \tag{2.52}$$

Vamos a tomar $\tau_0 > 0$ tal que $M(\dfrac{\ell}{\tau_0^2},1) > 0$. A continuación probaremos que $M(\dfrac{\ell}{\tau^2},1) > 0$ para $\tau \geq \tau_0$. Veamos: como $\tau \geq \tau_0$, entonces

$$\tau^2(2\ell+\tau^2) \geq \tau_0^2(2\ell+\tau_0^2).$$

Luego

$$\frac{\ell^2}{\tau^2(2\ell+\tau^2)} \leq \frac{\ell^2}{\tau_0^2(2\ell+\tau_0^2)}. \tag{2.53}$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{2\ell}{\tau^2}+1 \leq \frac{2\ell}{\tau_0^2}+1$$

y luego

$$exp(\frac{2\ell}{\tau^2}+1)-1 \leq exp(\frac{2\ell}{\tau_0^2}+1)-1. \tag{2.54}$$

Entonces, de (2.53) y (2.54) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\ell^2}{\tau^2(2\ell+\tau^2)}\left[exp(\frac{2\ell}{\tau^2}+1)-1\right] &\leq \frac{\ell^2}{\tau_0^2(2\ell+\tau_0^2)}\left[exp(\frac{2\ell}{\tau_0^2}+1)-1\right] \\
\frac{\ell^2}{\tau^2(2\ell+\tau^2)}\left[1-exp(\frac{2\ell}{\tau^2}+1)\right] &\geq \frac{\ell^2}{\tau_0^2(2\ell+\tau_0^2)}\left[1-exp(\frac{2\ell}{\tau_0^2}+1)\right] \\
1+\frac{\ell^2}{\tau^2(2\ell+\tau^2)}\left[1-exp(\frac{2\ell}{\tau^2}+1)\right] &\geq 1+\frac{\ell^2}{\tau_0^2(2\ell+\tau_0^2)}\left[1-exp(\frac{2\ell}{\tau_0^2}+1)\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$M(\frac{\ell}{\tau^2},1) \geq M(\frac{\ell}{\tau_0^2},1) > 0$$

entonces

$$M(\frac{\ell}{\tau^2}, 1) > 0 \tag{2.55}$$

Por lo tanto de (2.51), (2.52), (2.55) y por los lemas 2.3 y 2.5 se sigue que el operador F definido en (2.50) es continuo y fuertemente monótono sobre $L^2(\Omega(\tau))$. Luego, aplicando el Teorema de Minty-Browder tenemos que el operador F es sobreyectivo, es decir, para cualquier $z^0 \in L^2(\Omega)$ existe $u^1 \in L^2(\Omega(\tau))$ tal que

$$F(w^0, u^1) = \upsilon^0$$

donde

$$\upsilon^0(x) = z^0(\frac{x}{\tau}) \quad , \quad x \in \Omega(\tau) \tag{2.56}$$

Por otra parte, también por el Teorema de Minty-Browder tenemos que $F^{-1}(w^0, .)$ es Lipschitz continuo. Resolviendo el problema (2.47) con el estado final u^1, encontramos una única solución u tal que

$$u \in L^2(0, 1; H_0^1(\Omega(\tau))) \tag{2.57}$$

y además

$$u' \in L^2(0, 1; L^2(\Omega(\tau))) \tag{2.58}$$

como

$$H_0^1(\Omega(\tau)) \hookrightarrow L^2(\Omega(\tau)) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega(\tau))$$

y

$$u' = -\Delta u$$

tenemos

$$u \in L^2(0, 1; H^{-1}(\Omega(\tau))) \tag{2.59}$$

$$-\Delta u \in L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau))). \tag{2.60}$$

Luego, hemos encontrado una función de control interno

$$u - \Delta u \in L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))$$

de tal manera que la solución de (2.48) satisface

$$w(x,1) = \upsilon^0 \quad , \quad x \in \Omega(\tau).$$

Definiendo

$$y(x,t) = w(\tau x, \tau^2 t) \quad , \quad x \in \Omega, \qquad t \geq 0 \tag{2.61}$$

$$h(x,t,y^0,z^0) = \tau^2 \left[u(\tau x, \tau^2 t) - \Delta u(\tau x, \tau^2 t)\right] \tag{2.62}$$

tomando $t = T$ en (2.61)

$$y(x,T) = w(\tau x, \tau^2 T) \quad , \quad x \in \Omega$$

para $T = \dfrac{1}{\tau^2}$ tenemos

$$y(x,T) = w(\tau x, 1) \quad , \quad x \in \Omega \tag{2.63}$$

pero

$$w(\tau x, 1) = \upsilon^0 \quad , \quad x \in \Omega$$

donde

$$\upsilon^0(\tau x) = z^0(\frac{\tau x}{\tau}) = z^0(x) \quad , \quad x \in \Omega$$

luego en (2.63) tenemos

$$y(x,T) = z^0 \quad , \quad x \in \Omega$$

entonces y satisface (2.45).

Por lo tanto hemos probado que para $0 < T = \dfrac{1}{\tau^2} \leq \dfrac{1}{\tau_0^2} = T_0$ el sistema (2.1) es exactamente controlable en $L^2(\Omega)$ en el tiempo T. Con esto se ha probado la primera parte del Teorema.

A continuación probaremos que la función control h es Lipschitz continua.

Sean $z_1^0,\ z_2^0 \in L^2(\Omega)$ entonces existen $u_1, u_2 \in L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))$ soluciones de (2.47) con sus estados finales $u_1^1, u_2^1 \in L^2(\Omega(\tau))$ respectivos. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi(z_1^0) - \Phi(z_2^0)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \left\|h(x,t,y^0,z_1^0) - h(x,t,y^0,z_2^0)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
&= \left\|\tau^2(u_1 - \Delta u_1) - \tau^2(u_2 - \Delta u_2)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
&= \tau^4 \left\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

donde

$$u_1 = u_1(\tau x, \tau^2 t) \qquad , \qquad u_2 = u_2(\tau x, \tau^2 t) \qquad , \qquad \tau x \in \Omega(\tau).$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
&= \int_0^T \left\|u_1(\tau^2 t) - u_2(\tau^2 t) - \Delta(u_1 - u_2)(\tau^2 t)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \ . \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

Si hacemos $\tau^2 t = \delta$ entonces $\tau^2 dt = d\delta$, para todo $t \in [0,T]$ y además $\tau^2 t \in [0,1]$ pues $T = \dfrac{1}{\tau^2}$. Luego en (2.65) tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
&= \int_0^1 \left\|u_1(\delta) - u_2(\delta) - \Delta(u_1 - u_2)(\delta)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \frac{d\delta}{\tau^2} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \int_0^1 \left\|u_1(\delta) - u_2(\delta) - \Delta(u_1 - u_2)(\delta)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} d\delta \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\right\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega))} \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

como $L^2(0,1;H^{-1}(\Omega)) \equiv (L^2(0,1;H_0^1(\Omega)))'$ entonces en (2.66) tenemos

$$\begin{aligned} &\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ &= \frac{1}{\tau^2}\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\|^2_{(L^2(0,1;H_0^1(\Omega)))'} \end{aligned} \tag{2.67}$$

denotando $w = u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)$ en (2.66) tenemos

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} = \frac{1}{\tau^2}\|w\|^2_{(L^2(0,1;H_0^1(\Omega)))'} \tag{2.68}$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\left(\sup_{\varphi\in L^2(0,1;H_0^1(\Omega));\|\varphi\|\leq 1}\left|\langle w(\delta),\varphi(\delta)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right|\right)^2 \tag{2.69}$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\left(\sup_{\varphi\in L^2(0,1;H_0^1(\Omega));\|\varphi\|\leq 1}\left|\int_\Omega w(\tau x,\delta)\varphi(\tau x,\delta)dx\right|\right)^2 \tag{2.70}$$

Si hacemos $\tau x = s \in \Omega(\tau)$ entonces $dx = \dfrac{ds}{\tau}$. Reemplazando en (2.68) obtenemos

$$\begin{aligned} \|w\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \frac{1}{\tau^2}\left(\sup_{\varphi\in L^2(0,1,H_0^1(\Omega(\tau)));\|\varphi\|\leq 1}\left|\int_{\Omega(\tau))} w(s,\delta)\varphi(s,\delta)\frac{ds}{\tau}\right|\right)^2 \\ &= \frac{1}{\tau^4}\left(\sup_{\varphi\in L^2(0,1;H_0^1(\Omega(\tau)));\|\varphi\|\leq 1}\left|\langle w(\delta),\varphi(\delta)\rangle_{H^{-1}(\Omega(\tau))\times H_0^1(\Omega(\tau))}\right|\right)^2 \\ &= \frac{1}{\tau^4}\|w\|^2_{(L^2(0,1;H_0^1(\Omega(\tau))))'} \\ &= \frac{1}{\tau^4}\|w\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} \end{aligned} \tag{2.71}$$

es decir

$$\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tau^4}\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} \\ &= \frac{1}{\tau^4}\int_0^1 \|(u_1 - u_2)(\delta) - \Delta(u_1 - u_2)(\delta)\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))} d\delta. \end{aligned}$$

Como el operador $-\Delta$ es una isometría lineal de $H_0^1(\Omega(\tau))$ en $H^{-1}(\Omega(\tau))$ y además existe una constante $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^{-1}(\Omega(\tau))} \leq \sqrt{c}\,\|u\|_{H_0^1(\Omega(\tau))}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\|(u_1-u_2)(\delta) - \Delta(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))} \qquad (2.73)\\
&\leq \Big(\|(u_1-u_2)(\delta)\|_{H^{-1}(\Omega(\tau))} + \|-\Delta(u_1-u_2)(\delta)\|_{H^{-1}(\Omega(\tau))}\Big)^2\\
&\leq 2\,\|(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))} + 2\,\|-\Delta(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))}\\
&\leq 2c\,\|(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))} + 2\,\|(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))}\\
&= 2(c+1)\,\|(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))}
\end{aligned}
$$

de (2.73) en (2.72) tenemos

$$
\begin{aligned}
\|u_1-u_2-\Delta(u_1-u_2)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \frac{2(c+1)}{\tau^4}\int_0^1 \|(u_1-u_2)(\delta)\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))}\,d\delta\\
&= \frac{2(c+1)}{\tau^4}\,\|u_1-u_2\|^2_{L^2(0,1;H_0^1(\Omega(\tau)))} \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

Por el teorema 1.6 existe una constante $D > 0$ tal que

$$
\|u_1-u_2\|^2_{L^2(0,1;H_0^1(\Omega(\tau)))} \leq D\,\left\|u_1^1-u_2^1\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \qquad (2.75)
$$

entonces de (2.74) y (2.75) tenemos

$$
\|u_1-u_2-\Delta(u_1-u_2)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \frac{2(c+1)D}{\tau^4}\,\left\|u_1^1-u_2^1\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \qquad (2.76)
$$

pero

$$
\left\|u_1^1-u_2^1\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} = \left\|F^{-1}(w^0,\upsilon_1^0) - F^{-1}(w^0,\upsilon_2^0)\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))}
$$

como F^{-1} es Lipschitz continua, existe una constante $k > 0$ tal que

$$
\left\|F^{-1}(w^0,\upsilon_1^0) - F^{-1}(w^0,\upsilon_2^0)\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \leq k\,\left\|\upsilon_1^0-\upsilon_2^0\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))}. \qquad (2.77)
$$

Reemplazando (2.77) en (2.76) tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \frac{2(c+1)Dk}{\tau^4} \left\|v_1^0 - v_2^0\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \qquad (2.78)\\
&= \frac{2(c+1)Dk}{\tau^4} \int_{\Omega(\tau)} \left|v_1^0(s) - v_2^0(s)\right|^2 ds\\
&= \frac{2(c+1)Dk}{\tau^4} \int_{\Omega(\tau)} \left|z_1^0(\frac{s}{\tau}) - z_2^0(\frac{s}{\tau})\right|^2 ds
\end{aligned}$$

Como $s = \tau x \in \Omega(\tau)$ entonces $x \in \Omega$. Luego $x = \dfrac{s}{\tau}$ y $\tau dx = ds$ haciendo el cambio de variable en (2.78) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2 - \Delta(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \frac{2(c+1)Dk}{\tau^4} \int_{\Omega} \left|z_1^0(x) - z_2^0(x)\right|^2 \tau dx\\
&= \frac{2(c+1)Dk}{\tau^3} \left\|z_1^0 - z_2^0\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Finalmente reemplazando (2.79) en (2.64) tenemos

$$\left\|h(x,t,y^0,z_1^0) - h(x,t,y^0,z_2^0)\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \alpha \left\|z_1^0 - z_2^0\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

donde $\alpha = 2(c+1)Dk\tau$. Esto termina la demostración. ■

Capítulo 3

Comportamiento de los controles cuando $f \longrightarrow 0$

Sean c_1, c_2 dos constantes fijas donde $c_1 < c_2$. Sabemos del Teorema 2.1 que si $\varepsilon \in [c_1, c_2]$ entonces podemos encontrar $T > 0$ independiente de ε tal que para cualquier estado final $z^0 \in L^2(\Omega)$ existe un control interno $h_\varepsilon(x,t)$ tal que la solución y_ε, la cual depende de ε, satisface

$$\begin{cases} y'_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon + \varepsilon f(t, y_\varepsilon) = h_\varepsilon & , \text{ en } \quad Q \\ y_\varepsilon(x,0) = y^0 & , \text{ en } \quad \Omega \\ y_\varepsilon = 0 & , \text{ sobre } \quad \Sigma \end{cases} \tag{3.1}$$

y además verifica

$$y_\varepsilon(x,T) = z^0 \quad \text{en} \quad \Omega. \tag{3.2}$$

Ahora, estudiaremos el comportamiento de $h_\varepsilon(x,t)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $0 \in [c_1, c_2]$. Este es un tipo de perturbación no lineal, que está motivada por el trabajo de J. L. Lions [15], donde el problema de la perturbación no lineal ha sido estudiado detalladamente.

Tomemos εf en lugar de f en la prueba del Teorema 2.1. Es claro que el operador F definido por (2.50) ahora depende de ε. También escribiremos F_ε en lugar de F. Para un elemento $z^0 \in L^2(\Omega)$ fijo, sea u_ε^1 la solución de la ecuación operacional

$$F_\varepsilon(w^0, u^1) = v^0$$

es decir

$$F_\varepsilon(w^0, u_\varepsilon^1) = v^0$$

siendo $u_\varepsilon(x,t)$ la solución de (2.47) con $u^1 = u_\varepsilon^1$, donde w^0, v^0 son dadas por (2.49) y (2.56) respectivamente. Tomando $u_2^T = u_\varepsilon^1$ y $u_1^T = 0$ y $\Omega = \Omega(\tau)$ en (2.43) , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(\tau)} \left[F_\varepsilon(w^0, u_\varepsilon^1) - F_\varepsilon(w^0, 0)\right] \left[u_\varepsilon^1\right] dx &\geq \frac{1}{4} M(\frac{\ell\varepsilon}{\tau^2}, 1)(1 - e^{-\delta}) \int_{\Omega(\tau)} \left|u_\varepsilon^1\right|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{8}(1 - e^{-\delta}) \int_{\Omega(\tau)} \left|u_\varepsilon^1\right|^2 dx \end{aligned} \tag{3.3}$$

para $\varepsilon \in [c_1, c_2]$, si τ es suficientemente grande para que $M(\frac{\ell.\varepsilon}{\tau^2}, 1) > \frac{1}{2}$.

Lema 3.1 *Dada la solución w_ε de (2.48) donde*

$$w_\varepsilon(x,t) = F_\varepsilon(w^0, 0) \qquad \textit{con} \quad u - \Delta u = 0$$

se cumple

$$\int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon(x,t)|^2 \ dx \leq e^{\dfrac{\varepsilon(2\ell + \tau^2)t}{\tau^2}} \left[\int_{\Omega(\tau)} \left|w_\varepsilon^0(x)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon m(\Omega(\tau))}{\tau^4} \int_0^1 \left|f(\frac{t}{\tau^2}, 0)\right|^2 dt\right] \tag{3.4}$$

para todo $t \in [0,1]$.

Demostración. En efecto, multiplicando la ecuación (2.48) escrita para w_ε por w_ε e integrando sobre $Q_t(\tau) = \Omega(\tau) \times (0, t)$ tenemos

$$\int_{Q_t(\tau)} w'_\varepsilon w_\varepsilon dxdt - \int_{Q_t(\tau)} \Delta w_\varepsilon w_\varepsilon dxdt = -\varepsilon \int_{Q_t(\tau)} f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon dxdt \tag{3.5}$$

pero

$$\int_{Q_t(\tau)} w'_\varepsilon w_\varepsilon dxdt = \int_{\Omega(\tau)} \frac{1}{2} \left[|w_\varepsilon(x,t)|^2 - |w_\varepsilon(x,0)|^2 \right] dx$$

$$-\int_{Q_t(\tau)} \Delta w_\varepsilon w_\varepsilon dxdt = \int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2 \, dxdt$$

luego en (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\tau)} \frac{1}{2} \left[|w_\varepsilon(x,t)|^2 - |w_\varepsilon(x,0)|^2 \right] dx + \int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2 \, dxdt \\ &= -\varepsilon \int_{Q_t(\tau)} f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon dxdt \end{aligned} \tag{3.6}$$

pero

$$\varepsilon \int_{Q_t(\tau)} f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon dxdt = \varepsilon \int_{Q_t(\tau)} \left[f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon - f_\tau(t, 0) w_\varepsilon \right] dxdt + \varepsilon \int_{Q_t(\tau)} f_\tau(t, 0) w_\varepsilon dxdt$$

luego en (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\tau)} \frac{1}{2} \left[|w_\varepsilon(x,t)|^2 - |w_\varepsilon(x,0)|^2 \right] dx + \int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2 \, dxdt \\ &= -\varepsilon \int_{Q_t(\tau)} \left[f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon - f_\tau(t, 0) w_\varepsilon \right] dxdt - \varepsilon \int_{Q_t(\tau)} f_\tau(t, 0) w_\varepsilon dxdt \\ &\leq \left| -\varepsilon \int_{Q_t(\tau)} \left[f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon - f_\tau(t, 0) w_\varepsilon \right] dxdt - \varepsilon \int_{Q_t(\tau)} f_\tau(t, 0) w_\varepsilon dxdt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{Q_t(\tau)} \left| f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon - f_\tau(t, 0) w_\varepsilon \right| dxdt + \varepsilon \int_{Q_t(\tau)} \left| f_\tau(t, 0) w_\varepsilon \right| dxdt \end{aligned} \tag{3.7}$$

como la función f_τ es Lipschitz continua tenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_t(\tau)} \left| f_\tau(t, w_\varepsilon) w_\varepsilon - f_\tau(t, 0) w_\varepsilon \right| dxdt &\leq \int_{Q_t(\tau)} \left| f_\tau(t, w_\varepsilon) - f_\tau(t, 0) \right| |w_\varepsilon| \, dxdt \\ &\leq \frac{\ell}{\tau^2} \int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2 \, dxdt \end{aligned} \tag{3.8}$$

además

$$\int_{Q_t(\tau)} |f_\tau(t,0)w_\varepsilon|\, dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{Q_t(\tau)} \left[|f_\tau(t,0)|^2 + |w_\varepsilon|^2\right] dxdt \tag{3.9}$$

reemplazando (3.8) y (3.9) en (3.7) tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(\tau)} \frac{1}{2}\left[|w_\varepsilon(x,t)|^2 - |w_\varepsilon(x,0)|^2\right] dx + \int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2\, dxdt \\
&\leq \frac{\varepsilon \ell}{\tau^2}\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{Q_t(\tau)} \left[|f_\tau(t,0)|^2 + |w_\varepsilon|^2\right] dxdt
\end{aligned} \tag{3.10}$$

por la definición de f_τ en (2.46)

$$f_\tau(t,0) = \frac{1}{\tau^2} f(\frac{t}{\tau^2},0)$$

luego en (3.10) tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(\tau)} \frac{1}{2}\left[|w_\varepsilon(x,t)|^2 - |w_\varepsilon(x,0)|^2\right] dx + \int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2\, dxdt \\
&\leq \frac{\varepsilon \ell}{\tau^2}\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{Q_t(\tau)} \left[\left|\frac{1}{\tau^2} f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 + |w_\varepsilon|^2\right] dxdt \\
&= \frac{\varepsilon \ell}{\tau^2}\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon}{2\tau^4}\int_{Q_t(\tau)} \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt \\
&= \varepsilon\left(\frac{\ell}{\tau^2} + \frac{1}{2}\right)\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon}{2\tau^4}\int_0^t \left(\int_{\Omega(\tau)} \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dx\right) dt \\
&\leq \varepsilon\left(\frac{\ell}{\tau^2} + \frac{1}{2}\right)\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon}{2\tau^4}\int_0^1 \left(\int_{\Omega(\tau)} \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dx\right) dt
\end{aligned} \tag{3.11}$$

pero

$$\int_{\Omega(\tau)} \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dx = m(\Omega(\tau))\left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2$$

donde $m(\Omega(\tau))$ representa la medida de Lebesgue de $\Omega(\tau)$ entonces en (3.11) tenemos

$$\int_{\Omega(\tau)} \frac{1}{2}\left[|w_\varepsilon(x,t)|^2 - |w_\varepsilon(x,0)|^2\right] dx + \int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2\, dxdt$$
$$\leq \varepsilon\left(\frac{2\ell+\tau^2}{2\tau^2}\right)\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon m(\Omega(\tau))}{2\tau^4}\int_0^1 \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dt \tag{3.12}$$

multiplicando (3.12) por 2 y despejando el término $\int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon(x,t)|^2\, dx$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon(x,t)|^2\, dx &\leq \int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon(x,0)|^2\, dx - 2\int_{Q_t(\tau)} |\nabla w_\varepsilon(x,t)|^2\, dxdt + \\
&+ \varepsilon\left(\frac{2\ell+\tau^2}{\tau^2}\right)\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \frac{\varepsilon m(\Omega(\tau))}{\tau^4}\int_0^1 \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dt \\
&\leq \int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon(x,0)|^2\, dx + \varepsilon\left(\frac{2\ell+\tau^2}{\tau^2}\right)\int_{Q_t(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dxdt + \\
&+ \frac{\varepsilon m(\Omega(\tau))}{\tau^4}\int_0^1 \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dt \\
&= \int_{\Omega(\tau)} \left|w_\varepsilon^0(x)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon m(\Omega(\tau))}{\tau^4}\int_0^1 \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dt + \\
&+ \int_0^t \varepsilon\left(\frac{2\ell+\tau^2}{\tau^2}\right)\left[\int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon|^2\, dx\right] dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

aplicando la desigualdad de Gronwall en (3.13) obtenemos

$$\int_{\Omega(\tau)} |w_\varepsilon(x,t)|^2\, dx \leq exp\left[\frac{\varepsilon(2\ell+\tau^2)t}{\tau^2}\right]\left[\int_{\Omega(\tau)} \left|w_\varepsilon^0(x)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon m(\Omega(\tau))}{\tau^4}\int_0^1 \left|f(\frac{t}{\tau^2},0)\right|^2 dt\right]$$

con lo cual se ha probado (3.4). ■

A continuación demostraremos que $\{u_\varepsilon^1\}$ es una sucesión acotada en $L^2(\Omega(\tau))$ para $c_1 \leq \varepsilon \leq c_2$.

De (3.3) tenemos

$$\frac{1}{8}(1-e^{-\delta})\left\|u_\varepsilon^1\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \leq \int_{\Omega(\tau)} \left[F_\varepsilon(w^0,u_\varepsilon^1) - F_\varepsilon(w^0,0)\right]\left[u_\varepsilon^1\right] dx,$$

entonces

$$\left\|u_\varepsilon^1\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \leq \frac{8}{(1-e^{-\delta})}\int_{\Omega(\tau)} \left[F_\varepsilon(w^0,u_\varepsilon^1) - F_\varepsilon(w^0,0)\right]\left[u_\varepsilon^1\right] dx.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\left\|u_\varepsilon^1\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}^2 \leq \frac{8}{(1-e^{-\delta})}\left\|F_\varepsilon(w^0,u_\varepsilon^1)-F_\varepsilon(w^0,0)\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}\left\|u_\varepsilon^1\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}$$

es decir,

$$\left\|u_\varepsilon^1\right\|_{L^2(\Omega(\tau))} \leq \frac{8}{(1-e^{-\delta})}\left\|\upsilon^0-w_\varepsilon(x,t)\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}. \tag{3.14}$$

Aplicando la desigualdad triangular en (3.14) tenemos

$$\left\|u_\varepsilon^1\right\|_{L^2(\Omega(\tau))} \leq \frac{8}{(1-e^{-\delta})}\left[\left\|\upsilon^0\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}+\left\|w_\varepsilon(x,t)\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}\right] \tag{3.15}$$

del Lema (2.6) se obtuvo que $w_\varepsilon(x,t)$ es acotado en $L^2(\Omega(\tau))$, esto es

$$\left\|w_\varepsilon(x,t)\right\|_{L^2(\Omega(\tau))} \leq k$$

luego aplicando este resultado en (3.15) se tiene

$$\left\|u_\varepsilon^1\right\|_{L^2(\Omega(\tau))} \leq \frac{8}{(1-e^{-\delta})}\left[\left\|\upsilon^0\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}+k\right]$$

finalmente tomando

$$C=\frac{8}{(1-e^{-\delta})}\left[\left\|\upsilon^0\right\|_{L^2(\Omega(\tau))}+k\right]$$

tenemos

$$\left\|u_\varepsilon^1\right\|_{L^2(\Omega(\tau))} \leq C. \tag{3.16}$$

Teorema 3.1 *Sea h_ε la función control interno del sistema (3.1) obtenida en el Teorema 2.1 que conduce el estado inicial $y^0 \in L^2(\Omega)$ a un estado final $z^0 \in L^2(\Omega)$. Entonces para cualquier par de constantes fijas c_1 y c_2 con $c_1 < c_2$, el conjunto $\{h_\varepsilon; c_1 \leq \varepsilon \leq c_2\}$ es relativamente débilmente compacto en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Además, si $0 \in [c_1,c_2]$ cualquier límite débil h (cuando $\varepsilon_i \to 0$)*

de una subsucesión $\{h_{\varepsilon_i}\}$ *de* $\{h_\varepsilon; c_1 \le \varepsilon \le c_2\}$ *en* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *es un control interno del sistema*

$$\begin{cases} y' - \Delta y = h & , \ en \quad Q \\ y(x,0) = y^0 & , \ en \quad \Omega \\ y = 0 & , \ sobre \ \Sigma \end{cases} \tag{3.17}$$

es decir

$$y(T) = z^0. \tag{3.18}$$

Demostración. Sea la función $h_\varepsilon \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ definida en (2.62), entonces

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \left\|\tau^2\left[u_\varepsilon(\tau x,\tau^2 t) - \Delta u_\varepsilon(\tau x,\tau^2 t)\right]\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ &= \tau^4 \int_0^T \left\|u_\varepsilon(\tau^2 t) - \Delta u_\varepsilon(\tau^2 t)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \end{aligned} \tag{3.19}$$

si hacemos $s = \tau^2 t$ entonces $\tau^2 dt = ds$ para todo $t \in [0,T]$. Además $\tau^2 t \in [0,1]$ pues $T = \dfrac{1}{\tau^2}$ entonces en (3.19) tenemos

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \tau^4 \int_0^1 \|u_\varepsilon(s) - \Delta u_\varepsilon(s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \frac{ds}{\tau^2} \\ &= \tau^2 \|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega))} \\ &= \tau^2 \|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{\left(L^2\left(0,1;H^1_0(\Omega)\right)\right)'} \end{aligned} \tag{3.20}$$

pero

$$\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{\left(L^2\left(0,1;H^1_0(\Omega)\right)\right)'} \tag{3.21}$$

$$= \left(\sup_{\varphi \in L^2(0,1;H^1_0(\Omega)); \|\varphi\| \le 1} \left|\langle u_\varepsilon(s) - \Delta u_\varepsilon(s), \varphi(s)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}\right|\right)^2 \tag{3.22}$$

$$= \left(\sup_{\varphi \in L^2(0,1;H^1_0(\Omega)); \|\varphi\| \le 1} \left|\int_\Omega \left[u_\varepsilon(\tau x, s) - \Delta u_\varepsilon(\tau x, s)\right] \varphi(\tau x, s) dx\right|\right)^2 \tag{3.23}$$

si hacemos $m = \tau x$ entonces $m \in \Omega(\tau)$ pues $x \in \Omega$ y además $dm = \tau dx$. Luego tenemos en (3.21)

$$\begin{aligned}
&\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{\left(L^2\left(0,1;H_0^1(\Omega)\right)\right)'} \\
&= \left(\sup_{\varphi \in L^2(0,1;H_0^1(\Omega(\tau)));\|\varphi\|\leq 1} \left|\int_{\Omega(\tau)} \left[u_\varepsilon(m,s) - \Delta u_\varepsilon(m,s)\right]\varphi(m,s)\frac{dm}{\tau}\right|\right)^2 \\
&= \frac{1}{\tau^2}\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

reemplazando (3.24) en (3.20) tenemos

$$\|h_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} = \|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} \qquad (3.25)$$

pero

$$\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} = \int_0^1 \|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))}\, dt \qquad (3.26)$$

como $-\Delta$ es una isometría lineal de $H_0^1(\Omega(\tau))$ sobre $H^{-1}(\Omega(\tau))$ y además existe una constante $c > 0$ tal que $\|u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega(\tau))} \leq c\,\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega(\tau))}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))} &\leq \left(\|u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega(\tau))} + \|-\Delta u_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega(\tau))}\right)^2 && (3.27)\\
&\leq 2\,\|u_\varepsilon\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))} + 2\,\|-\Delta u_\varepsilon\|^2_{H^{-1}(\Omega(\tau))} && (3.28)\\
&\leq 2c\,\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))} + 2\,\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))} && (3.29)\\
&= 2\,(c+1)\,\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))} && (3.30)
\end{aligned}$$

reemplazando (3.27) en (3.26) tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} &\leq 2\,(c+1)\int_0^1 \|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega(\tau))}\, dt \\
&= 2\,(c+1)\,\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H_0^1(\Omega(\tau)))} && (3.31)
\end{aligned}$$

por el Teorema 1.6 existe una constante $D > 0$ tal que

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^1(\Omega(\tau)))} \leq D\left\|u_\varepsilon^1\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))}. \qquad (3.32)$$

Luego, aplicando (3.32) en (3.31) obtenemos

$$\|u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,1;H^{-1}(\Omega(\tau)))} \leq 2\,(c+1)\,D\,\left\|u^1_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))}$$

finalmente en (3.25) tenemos

$$\|h_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq 2\,(c+1)\,D\,\left\|u^1_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega(\tau))} \tag{3.33}$$

Por lo tanto, como el conjunto $\{u^1_\varepsilon; c_1 \leq \varepsilon \leq c_2\}$ es acotado entonces el conjunto $\{h_\varepsilon; c_1 \leq \varepsilon \leq c_2\}$ es acotado en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, pero $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ es un espacio reflexivo entonces $\{h_\varepsilon; c_1 \leq \varepsilon \leq c_2\}$ es relativamente débil compacto. Esto prueba la primera parte del Teorema 2.2.

A continuación probaremos la segunda parte del Teorema 2.2.

Sea $0 \in [c_1, c_2]$. Como el conjunto $\{h_\varepsilon; c_1 \leq \varepsilon \leq c_2\}$ es acotado en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, entonces existe una subsucesión $\{h_{\varepsilon_i}\}$ de $\{h_\varepsilon; c_1 \leq \varepsilon \leq c_2\}$ tal que

$$h_{\varepsilon_i} \rightharpoonup h \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

cuando $\varepsilon_i \to 0$.

Ahora probaremos que h es el control buscado.

Sea y la solución del sistema (3.17). Entonces restando (3.1) de (3.17) tenemos

$$\begin{cases} (y_\varepsilon - y)' - \Delta(y_\varepsilon - y) + \varepsilon f(t, y_\varepsilon) = h_\varepsilon - h & , \text{ en } \quad Q \\ y_\varepsilon(x,0) - y(x,0) = 0 & , \text{ en } \quad \Omega \\ y_\varepsilon - y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \end{cases} \tag{3.34}$$

Para cualquier $\theta^T \in L^2(\Omega)$, sea $\theta = \theta(x,t)$ la solución de

$$\begin{cases} \theta' + \Delta\theta = 0 & , \text{ en } \quad Q \\ \theta(x,T) = \theta^T & , \text{ en } \quad \Omega \\ \theta = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \end{cases} \tag{3.35}$$

multiplicando (3.34) por θ e integrando sobre Q tenemos

$$\int_Q (y_\varepsilon - y)'\theta dxdt - \int_Q \Delta(y_\varepsilon - y)\theta dxdt + \int_Q \varepsilon f(t, y_\varepsilon)\theta dxdt = \int_Q (h_\varepsilon - h)\theta dxdt$$

aplicando la identidad de Green obtenemos

$$\int_Q (y_\varepsilon - y)'\theta dxdt + \int_Q \nabla(y_\varepsilon - y).\nabla\theta dxdt + \int_Q \varepsilon f(t, y_\varepsilon)\theta dxdt = \int_Q (h_\varepsilon - h)\theta dxdt \tag{3.36}$$

pero

$$\int_Q (y_\varepsilon - y)'\theta dxdt = \int_\Omega \left(\int_0^T (y_\varepsilon - y)'\theta dt\right) dx \tag{3.37}$$

integrando por partes tenemos

$$\int_0^T (y_\varepsilon - y)'\theta dt = [y_\varepsilon(T) - y(T)]\,\theta^T - \left(y_\varepsilon^0 - y^0\right)\theta^0 - \int_0^T (y_\varepsilon - y)\theta' dt$$

luego en (3.37) tenemos

$$\int_Q (y_\varepsilon - y)'\theta dxdt = \int_\Omega (y_\varepsilon(T) - y(T))\,\theta^T dx - \int_\Omega \left(y_\varepsilon^0 - y^0\right)\theta^0 dx - \\ - \int_Q (y_\varepsilon - y)\theta' dxdt$$

de (3.34) y (3.35) tenemos que $y_\varepsilon^0 = y^0$ y $\theta' = -\Delta\theta$ entonces

$$\int_Q (y_\varepsilon - y)'\theta dxdt = \int_\Omega [y_\varepsilon(T) - y(T)]\,\theta^T dx + \int_Q (y_\varepsilon - y)\Delta\theta dxdt \tag{3.38}$$

aplicando la identidad de Green a (3.38) tenemos

$$\int_Q (y_\varepsilon - y)'\theta dxdt = \int_\Omega [y_\varepsilon(T) - y(T)]\,\theta^T dx - \int_Q \nabla(y_\varepsilon - y).\nabla\theta dxdt \tag{3.39}$$

reemplazando (3.39) en (3.36) obtenemos

$$\int_\Omega [y_\varepsilon(T) - y(T)]\,\theta^T dx + \int_Q \varepsilon f(t, y_\varepsilon)\theta dxdt = \int_Q (h_\varepsilon - h)\theta dxdt$$

pero $y_\varepsilon(T) = z^0$ entonces tenemos

$$\int_\Omega \left(z^0 - y(T)\right)\theta^T dx + \int_Q \varepsilon f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta dxdt = \int_Q \left(h_\varepsilon - h\right)\theta dxdt \tag{3.40}$$

Ahora hallaremos el límite de (3.40) cuando $\varepsilon_i \to 0$, tomando en este caso $\varepsilon_i = \varepsilon$.

Primero probaremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_Q \varepsilon f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta dxdt = 0 \tag{3.41}$$

para esto basta probar que $\displaystyle\int_Q f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta dxdt$ es acotada. Veamos

$$\begin{aligned}\left|\int_Q f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta dxdt\right| &\leq \int_Q \left|f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta\right| dxdt \\ &= \int_0^T \left(\int_\Omega \left|f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta\right| dx\right) dt \end{aligned}\tag{3.42}$$

como $f\left(t, y_\varepsilon\right) \in L^2(\Omega)$ y $\theta(x,t) \in L^2(\Omega)$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder en (3.42) tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_Q f\left(t, y_\varepsilon\right)\theta dxdt\right| &\leq \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\theta(t)\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \int_0^T \left(\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt \\ &= \|f(t)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta(t)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\end{aligned}$$

con lo cual queda probado (3.41).

A continuación probaremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_Q \left(h_\varepsilon - h\right)\theta dxdt = 0 \tag{3.43}$$

tenemos que

$$h_\varepsilon \rightharpoonup h \quad \text{en} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

cuando $\varepsilon \to 0$.

Pero $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \equiv (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'$ luego tenemos

$$h_\varepsilon \rightharpoonup h \quad \text{en} \quad (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'$$

esto quiere decir

$$\langle \varphi, h_\varepsilon \rangle_{(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'' \times (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'} \to \langle \varphi, h \rangle_{(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'' \times (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'} \quad (3.44)$$

para todo $\varphi \in (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))''$.

Como $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ es reflexivo entonces $(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))'' \equiv L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y por la inyección canónica en (3.44) tenemos

$$\langle h_\varepsilon, \varphi \rangle_{(L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))' \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \to \langle h, \varphi \rangle_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))' \times (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))}$$

para todo $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

En particular, si tomamos $\varphi = \theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle h_\varepsilon, \theta \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T (h_\varepsilon, \theta)_{L^2(\Omega)}\, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega h_\varepsilon \theta dxdt \\
&= \int_Q h_\varepsilon \theta dxdt
\end{aligned}$$

luego

$$\int_Q h_\varepsilon \theta dxdt \to \int_Q h\theta dxdt$$

es decir

$$\int_Q (h_\varepsilon - h)\theta dxdt \to 0$$

con lo cual queda probado (3.43).

Finalmente reemplazando (3.41) y (3.43) en el límite de (3.40) cuando $\varepsilon \to 0$ tenemos

$$\int_\Omega \left(z^0 - y(T)\right)\theta^T dx = 0$$

como θ^T fue elegido arbitrariamente entonces se cumple (3.18), con lo que queda demostrado el teorema. $\blacksquare$

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Modelos de reacción - difusión

Supongamos que tenemos una sustancia distribuída en $\mathbb{R}^n$ y sea Ω una región acotada en $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ y vector normal exterior η. Denotemos la densidad de la sustancia por $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $u(x,t)$ es el valor numérico de la densidad en ciertas unidades de medida en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ y en el instante t. La dimensión n es arbitraria. Recordemos algunos conceptos del cálculo vectorial.

∗ Gradiente

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

∗ Divergencia de un Campo Vectorial

$$\operatorname{div} X = \nabla . X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

∗ Laplaciano

$$\Delta f = \nabla . \nabla f = \nabla^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

La tasa de cambio de la cantidad de una sustancia en Ω es dada por el flujo negativo de la sustancia a través de su frontera $\partial\Omega$ más una cantidad de sustancia generada en Ω, es decir

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u d\nu = -\int_{\partial\Omega} X.\eta dS + \int_{\Omega} f d\nu$$

donde X es el campo vectorial sobre $x \in \mathbb{R}^n$ de la sustancia que apunta en la dirección en la cual se mueve la sustancia y con magnitud de la cantidad de sustancia por unidad de área por unidad de tiempo que pasa a través del plano perpendicular a esta dirección. Las notaciones $d\nu$ y dS representan los diferenciales de volumen y superficie, respectivamente. El campo vectorial η es el campo unitario normal exterior sobre la frontera de Ω. La función f representa la cantidad de sustancia generada en Ω por cada unidad de volumen en cada unidad de tiempo, generalmente es una función de la densidad, la posición y el tiempo, es decir

$$f = f(u, x, t)$$

El signo menos en el término de flujo es necesario porque estamos midiendo la razón de cambio de la cantidad de sustancia en Ω. Por ejemplo, cuando el flujo esta totalmente fuera de Ω, el producto interno $X.\eta$ es no negativo y el signo menos se requiere porque la razón de cambio de la cantidad de sustancia en Ω es negativa. Aplicando el Teorema de la Divergencia, podemos reescribir el término de flujo intercambiando la derivada temporal con la integral de la densidad y así, obtenemos la siguiente expresión

$$\int_{\Omega} u_t d\nu = -\int_{\Omega} \operatorname{div} X d\nu + \int_{\Omega} f d\nu$$

es decir

$$\int_{\Omega}(u_t + \operatorname{div} X - f)d\nu = 0,$$

de donde obtenemos la ecuación

$$u_t + \operatorname{div} X = f \tag{4.1}$$

A partir de esta ecuación y aplicando relaciones constitutivas entre la densidad u de la sustancia y el campo de flujo X obtendremos un modelo más interesante. Las leyes constitutivas que relacionan u con X no siempre son conocidas, por lo que resulta necesario utilizar el comportamiento físico y los resultados de experimentos. Estos problemas son centrales en la física-matemática. Para la ecuación (4.1), la relación constitutiva clásica es la llamada Ley de Darcy, de Fick o de Fourier, esta ley es dada por

$$X = -K\nabla u + \mu V \tag{4.2}$$

donde $K \geq 0$ y μ son funciones de la densidad, la posición y el tiempo. La función V denota el campo de flujo para el medio en el que se mueve la sustancia. El signo menos en el término gradiente indica que la sustancia se difunde de los puntos de mayor a los de menor concentración.

Reemplazando (4.2) en (4.1), obtenemos la ecuación

$$u_t = -\operatorname{div}(-K\nabla u + \mu V) + f$$

$$u_t = \operatorname{div}(K\nabla u) - \operatorname{div}(\mu V) + f \tag{4.3}$$

Si asumimos que el coeficiente de difusión K es constante y positivo e igual a k^2 y que la función μ es proporcional a la densidad u con

$$\mu(u, x, t) = \gamma u$$

donde $0 \leq \gamma \leq 1$ es una constante que determina la cantidad de u que se mueve con la velocidad del campo V, y V es un campo vectorial incompresible, es decir, $\operatorname{div} V = 0$, tal como el campo de velocidad del movimiento del agua, obtenemos

$$\begin{aligned} u_t &= k^2 \operatorname{div}(\nabla u) - \gamma \operatorname{div}(u.V) + f \\ &= k^2 \operatorname{div}(\nabla u) - \gamma(\nabla u.V + u \operatorname{div} V) + f \\ &= k^2 \Delta u - \gamma \nabla u.V + f \end{aligned}$$

es decir,

$$u_t + \gamma \nabla u.V = k^2 \Delta u + f \tag{4.4}$$

El término $\gamma \nabla u.V$ es llamado *término de convección*, $k^2 \Delta u$ es llamado *término de difusión*, y f es llamado *término fuente*. La ecuación diferencial parcial (4.4) es usada para modelar diversos procesos y fenómenos físicos que envuelven reacción, difusión o convección.

Cuando el medio de la sustancia es estacionario, es decir, $V = 0$, la ecuación (4.4) se reduce a

$$u_t = k^2 \Delta u + f \tag{4.5}$$

que es la conocida ecuación de difusión. Si interpretamos la función u como la temperatura entonces (4.5) representa el clásico modelo de flujo de calor.

4.2. Control de la ecuación de Fisher

El modelo de Fisher surge del estudio de la dinámica poblacional en un dominio Ω y en un intervalo de tiempo $[0, T]$ de la población de una especie no diferenciada, es decir, sin tomar en cuenta la edad de los individuos, el sexo, o la interacción entre ellos.

Consideremos una población cuya densidad en un instante t es dada por la función $u(t)$. Denotemos por r la tasa de natalidad y por k la cantidad máxima de habitantes en el hábitat (esta cantidad es llamada *capacidad de carga*).

Según Fisher [11], la razón de cambio de la cantidad de individuos con respecto al tiempo es dada por

$$\frac{du}{dt} = ru(t) - \frac{r}{k}u^2(t)$$

donde el término $-\frac{r}{k}u(t)$ representa la tasa de mortalidad como consecuencia de la sobrepoblación, y es proporcional a la densidad poblacional $u\,(t)$. A esto se debe la presencia del término $-\frac{r}{k}u^2(t)$ en la ecuación anterior. Así, tenemos la ecuación logística

$$\frac{du}{dt} = ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right)$$

en la que se considera un crecimiento poblacional antiregulatorio y que depende únicamente de la variable temporal t.

Si tomamos en cuenta el movimiento de la población en el hábitat Ω (difusión) debemos considerar la suma de los movimientos de cada uno de los individuos que conforman la población, los cuales se mueven al azar. Ahora, la función $u = u(t)$ que definimos antes, va a depender del punto x del hábitat. Así tenemos una función estado $u = u(x,t)$.

Siguiendo el enfoque de Cosner [7], consideramos el proceso estocástico conocido como *random walk* para describir el fenómeno de difusión. Supongamos que el hábitat es unidimensional y que un individuo de la población se encuentre en la posición x en el instante t y que se mueve a la derecha o a la izquierda con igual probabilidad, dando pasos de tamaño δx en cada intervalo de tiempo $\delta t > 0$ transcurrido. Si $p(x,t)$ representa la probabilidad de que el individuo se encuentre en la posición x en el instante t, entonces

$$p(x,t) = \frac{1}{2}p(x+\delta x, t-\delta t) + \frac{1}{2}p(x-\delta x, t-\delta t)$$

Si restamos $p(x, t-\delta t)$ a ambos miembros de la igualdad anterior y luego dividimos entre δt, tenemos

$$\frac{p(x,t)-p(x,t-\delta t)}{\delta t} = \frac{1}{2\delta t}\left[p(x+\delta x, t-\delta t) - 2p(x,t-\delta t) + p(x-\delta x, t-\delta t)\right]$$

Si denotamos

$$\frac{\delta x^2}{2t} = \gamma > 0$$

tenemos

$$\frac{p(x,t)-p(x,t-\delta t)}{\delta t} = \frac{\gamma}{(\delta x)^2}\left[p(x+\delta x, t-\delta t) - 2p(x,t-\delta t) + p(x-\delta x, t-\delta t)\right] \tag{4.6}$$

Haciendo $\delta x, \delta t \to 0$ en (4.6), obtenemos:

$$\lim_{\delta t, \delta x \to 0} \frac{p(x,t)-p(x,t-\delta t)}{\delta t} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

y

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta t, \delta x \to 0} \frac{\gamma}{(\delta x)^2}\left[p(x+\delta x, t-\delta t) - 2p(x,t-\delta t) + p(x-\delta x, t-\delta t)\right] \\
&= \gamma \lim_{\delta x \to 0} \frac{p(x+\delta x, t) - 2p(x,t) + p(x-\delta x, t)}{(\delta x)^2} \\
&= \gamma \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\delta x}\left[\frac{p(x+\delta x, t) - p(x,t)}{\delta x} - \frac{p(x,t) - p(x-\delta x, t)]}{\delta x}\right] \\
&= \gamma \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\delta x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(p(x+\delta x, t)) - \frac{\partial}{\partial x}(p(x,t))\right] \\
&= \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Es decir, haciendo $\delta x, \delta t \to 0$ en (4.6) tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

que tiene la forma de una ecuación del calor. La constante γ es comunmente llamada coeficiente de difusión.

Por lo tanto, si consideramos únicamente el movimiento de los individuos sin tomar en cuenta las tasas de natalidad, obtenemos una relación entre el estado u de la población con la probabilidad de que los individuos se encuentren en cierta posición x en el instante t. Así, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u = u(x,t)$ y $\gamma > 0$.

Si consideramos un espacio de dimensión $n \geq 2$ podemos expresar el fenómeno de difusión como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \Delta u.$$

De lo anterior, si queremos describir el crecimiento de una población de acuerdo a la ecuación logística con el paso del tiempo y que a su vez se mueva sobre su hábitat, debemos combinar los resultados anteriores. De esta forma, obtenemos el modelo

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \gamma \Delta u(x,t) = r u(x,t) \left(1 - \frac{u(x,t)}{k}\right)$$

donde x es un punto del hábitat $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y r, k,γ son parámetros positivos.

El modelo de Fisher es un modelo de reacción-difusión que describe el crecimiento de una población. En esta sección estudiaremos el modelo de Fisher anterior, que en adelante escribiremos como

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \Delta u = ru \left(1 - \frac{u}{k}\right) \tag{4.7}$$

donde γ , r y k son parámetros positivos. Este modelo es conocido como el *modelo logístico de Fisher*. En este modelo, el término $\gamma \Delta u$ es el *término de difusión* y el término $ru \left(1 - \frac{u}{k}\right)$ que representa el crecimiento poblacional es llamado *término de reacción*.

En la ecuación (4.7), el término no lineal $f(u) = ru\left(1 - \frac{u}{k}\right)$ representa una tasa de crecimiento que es proporcional a u cuando la densidad u sea pequeña, pero que decrece cuando u crece y se anula cuando $u = k$. Esto corresponde al crecimiento de una población u cuando existe un límite k sobre el tamaño de la población que el hábitat puede soportar; si $u > k$, entonces $f(u) < 0$, entonces la población decrece cuando u es más grande que el valor límite k. Esta interpretación sugiere que el hábitat puede soportar una cierta población máxima tal que

$$0 \leq u(x, 0) \leq k \quad , \quad \text{para } x \in \Omega.$$

En esta sección, estudiaremos la ecuación (4.7) a la que le adicionaremos un término de control del crecimiento poblacional h que podría ser interpretado como la tasa de mortalidad de los individuos de la especie (natural o provocada), la recolección de individuos de la especie por agentes externos o la incorporación de individuos a la población. Así, estudiaremos el modelo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \Delta u - ru \left(1 - \frac{u}{k}\right) = h \tag{4.8}$$

donde h representa la *función control*. Si consideramos una densidad inicial de población, tenemos la condición inicial para nuestro problema, a la que denotaremos

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \quad x \in \Omega,$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el hábitat de la especie, el cual supondremos acotado y con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular. Entonces, el término $u_0(x)$ representa la densidad inicial de la población en el punto x del hábitat Ω.

En relación a la condición de frontera, podríamos suponer que en la frontera del dominio Ω no existen condiciones para la sobrevivencia de la especie. Así, tendríamos el modelo de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma\Delta u - ru\left(1 - \dfrac{u}{k}\right) = h & , \text{ en } \quad \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases} \tag{4.9}$$

donde $T > 0$ será el *tiempo de control*.

Si suponemos que la especie se encuentra en un hábitat aislado Ω de tal manera que no hay flujo a través de la frontera $\partial\Omega$, es decir, ningún miembro de la especie entra o sale del hábitat Ω, tendríamos el problema de Neumann homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \gamma\Delta u - ru\left(1 - \dfrac{u}{k}\right) = h & , \text{ en } \quad \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases} \tag{4.10}$$

En los modelos anteriores, el parámetro r representa la tasa natural de crecimiento de la especie, k representa la capacidad de sostenibilidad de los individuos de la especie y γ es la velocidad de dispersión de la especie sobre el hábitat Ω.

En la ecuación de Fisher (4.8), las variables t, x y u tienen como dimensiones el tiempo, la longitud y la cantidad de individuos por área, respectivamente. Los parámetros son: la tasa de crecimiento r con dimensión de $\frac{1}{tiempo}$, la capacidad de sostenibilidad k con dimensión de individuos por área, mientras que la constante de difusión γ con dimensión longitud al cuadrado por tiempo.

Usando estos parámetros, podemos construir variables adimensionales, definiendo

$$\widetilde{t} = \frac{t}{r^{-1}} \quad , \quad \widetilde{x} = \frac{x}{\sqrt{\frac{\gamma}{r}}} \quad , \quad \widetilde{u} = \frac{u}{k} \ .$$

Así, cada una de las variables $\widetilde{t}$, $\widetilde{x}$ y $\widetilde{u}$ tiene la forma de una variable dimensional dividida por una constante de la misma dimensión. Las cantidades que aparecen en los denominadores se denominan *escalas*. Por ejemplo, la densidad poblacional u está escalada por k, lo cual significa que la población está siendo medida con respecto a la capacidad de sostenibilidad; r^{-1} es la escala temporal, lo cual quiere decir que el tiempo se mide con respecto al inverso de la tasa de crecimiento y así sucesivamente.

Usando la regla de la cadena, podemos transformar la ecuación diferencial parcial (4.8) a las nuevas variables adimensionales.

Así tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = rk\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{t}} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{k}{\frac{\gamma}{r}}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \widetilde{x}^2} \ .$$

En consecuencia, la ecuación diferencial parcial (4.8) se transforma en

$$rk\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{t}} - \gamma \frac{k}{\frac{\gamma}{r}} \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \widetilde{x}^2} - rk\widetilde{u}\,(1-\widetilde{u}) = \widetilde{h},$$

es decir,

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{t}} - \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \widetilde{x}^2} - \widetilde{u}\,(1-\widetilde{u}) = \widetilde{h},$$

donde $\widetilde{h}$ es la función control en la que se tranforma h luego del cambio de variables.

Hecho este reescalamiento, seguiremos usando las variables x, t y u para escribir la ecuación de Fisher. Así, llegamos al modelo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - u\,(1-u) = h$$

Estudiaremos el problema de control (4.9), el cual, escrito en su forma reescalada es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - u\,(1-u) = h & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

pues se trata de un problema parabólico semilineal con condiciones inicial y de frontera de tipo Dirichlet (homogéneo), como el que hemos estudiado en el capítulo 2 de la presente tesis.

4.3. El modelo Kierstead, Slobodkin y Skellam

Uno de los modelos de reacción-difusión más simples fue introducido por Skellam [23] en 1951 y por Kierstead y Slobodkin [12] en 1953. Se trata de un modelo básico de crecimiento poblacional con difusión en el que se supone que la población habita en una región finita con exterior letal (condición frontera de Dirichlet homogénea). Si $u = u(x,t)$ es la densidad poblacional en una región donde la tasa de crecimiento de la población es r y el coeficiente de difusión es d, entonces, el modelo más simple toma la forma

$$u_t - d\Delta u = ru, \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty)$$

$$u = 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, \infty)$$

Modelos de esta forma son llamados modelos *KISS* (Kierstead-Slobodkin-Skellam). El problema de control asociado a este modelo es dado por

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u - ru = h & , \ \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & , \ \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u = u_0 & , \ \text{en } \Omega \end{cases} \tag{4.11}$$

Como hemos observado antes, podemos reescalar la densidad u y obtener el problema de control siguiente:

Dados u_0, $u_1 \in L^2(\Omega)$, hallar una función control $h \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$ tal que la solución u de problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \alpha u = h & , \ \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & , \ \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u = u_0 & , \ \text{en } \Omega \end{cases} \tag{4.12}$$

satisfaga $u(T) = u_1$. Notemos que la función de reacción dada por

$$f(u) = \alpha u$$

es claramente lipschitziana. Por lo tanto, estamos en las condiciones del Teorema 2.1. En tal sentido, tenemos el siguiente teorema de control para el modelo *KISS* de crecimiento poblacional.

Teorema 4.1 *Existe $T_0 > 0$ tal que para $0 < T \leq T_0$, el sistema (4.12) es exactamente controlada en $L^2(\Omega)$ en el tiempo T, es decir, dados u_0 (estado inicial) y u_1 (estado final) cualesquiera en $L^2(\Omega)$, existe una función control*

$$h \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$$

tal que la solución de (4.12) satisface

$$u(T) = u_1$$

4.4. El modelo de Fisher-KPP

Retomamos el modelo de Fisher, llamado también modelo Fisher-KPP (Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov). Consideremos el PVIF asociado a la ecuación de Fisher-KPP.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u\,(1-u) & ,\ \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & ,\ \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & ,\ \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.13}$$

Al considerar el problema de control asociado a (4.13) notamos que el teorema 2.1 de nuestro trabajo no puede ser directamente aplicado debido a que la función $u \longmapsto u(1-u)$ no es lipschiziana sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, dado que la función $u = u(x,t)$ representa a densidad de una población en un territorio acotado Ω, podemos suponer que

$$0 \leq u(x,t) \leq 1$$

Luego la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(u) = u(1-u)$ es tal que $\varphi(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u) - \varphi(v)\| &= \|u(1-u) - v(1-v)\| \\
&= \left\|u - u^2 - v + v^2\right\| \\
&= \|(u-v) - (u+v)(u-v)\| \\
&= \|1 - u - v\| \, \|u - v\| \\
&\leq 3 \, \|u - v\|
\end{aligned}$$

es decir φ es lipschitziana.

Luego en el contexto descrito en la sección 3.2 podemos reescribir el teorema 2.1 en la siguiente forma

Teorema 4.2 *Dado $u_0 \in L^2(\Omega)$ con $0 \leq u_0(x,t) \leq 1$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe $T_0 > 0$ tal que para cada $0 < T \leq T_0$, el sistema de Fisher-KPP*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - u(1-u) = h & , \quad en \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & , \quad sobre \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \quad en \quad \Omega \end{cases} \tag{4.14}$$

es exactamente controlable en $L^2(\Omega)$, es decir, existe una función control $h \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ que conduce la solución u de (4.14) al estado u_1 en el tiempo T.

4.5. Positividad de las soluciones

Un punto importante, que aún no ha sido notado es que, si $u(x,t)$ representa la densidad poblacional de una especie en un territorio acotado, debemos garantizar que tiene sentido (matemáticamente) el suponer que

$$0 \leq u(x,t) \leq 1$$

Notemos también que en el teorema anterior hemos supuesto, a diferencia de lo estudiado en el capítulo 2 (teorema de control), que el dato inicial u_0 está acotado. El siguiente teorema le dará sentido a tal suposición.

Teorema 4.3 *Dados* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *con* $0 \leq u_0 \leq 1$, *existe una única función* $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ *con* $u_t \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ *que es solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - u(1-u) = 0 & , \quad en \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & , \quad sobre \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \quad en \quad \Omega \end{cases}$$

que verifica

$$0 \leq u(x,t) \leq 1.$$

Demostración. Ver Troltz [26]. ■

4.6. Una variante del modelo Fisher-KPP

Consideremos el modelo no lineal

$$u_t - u_{xx} = u(1-u^2)$$

Si definimos

$$f(u) = u(1 - u^2) = u - u^3$$

vemos que

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= u - u^3 - (v - v^3) \\ &= (u - v) - (u - v)(u^2 + uv + v^2) \\ &= (u - v)(1 - u^2 - uv - v^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\|f(u) - f(v)\| \leq k \|u - v\|, \forall u, v \in [0, 1]$$

es decir, f es lipschitziana sobre $[0, 1]$. Con un teorema análogo al teorema 4.3 se demuestra que, si la condición inicial $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $0 \leq u_0 \leq 1$ entonces el problema de valor inicial y frontera

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u(1 - u^2) & , \text{ en } \quad \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0 & , \text{ en } \quad \Omega \end{cases} \tag{4.15}$$

posee solución $u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ tal que $0 \leq u(x, t) \leq 1$. Luego, por el teorema 2.1, existe $T_0 > 0$ y una función control $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)$ que permite controlar exactamente el sistema (4.15). Más precisamente, tendríamos el siguiente resultado:

Teorema 4.4 *Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ con $0 \leq u_0(x, t) \leq 1$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe $T_0 > 0$*

tal que para cada $0 < T \leq T_0$, el sistema de Fisher-KPP

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u(1-u^2) = h & , \quad en \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & , \quad sobre \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \quad en \quad \Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

es exactamente controlable en $L^2(\Omega)$, es decir, existe una función control $h \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ que conduce la solución u de (4.15) al estado u_1 en el tiempo T.

4.7. El modelo de Jin-ichi-Nagumo

La ecuación de Jin-Ichi-Nagumo dada por

$$u_t - u_{xx} = u(1-u)(u-a),$$

describe la propagación de un impulso nervioso en un axón, la diseminación de rasgos genéticos y es ampliamente utilizada en biología.

Consideremos el problema de valor inicial y frontera asociado a la ecuación de Jin-ichi-Nagumo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u(1-u)(u-a) & , \quad \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & , \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \quad \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.17}$$

donde $0 < a < 1$ es un parámetro.

Bajo la hipótesis $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ con $0 \leq u_0 \leq 1$, se obtiene una solución $u = u(x,t)$ tal que $0 \leq u(x,t) \leq 1$ y luego, como antes, esto permite probar que la función

$$f(u) = u(1-u)(u-a)$$

es lipschitziana sobre $[0, 1]$. Luego, podemos enunciar el teorema 2.1 en términos del PVIF (4.17) y demostrar la controlabilidad exacta en $L^2(\Omega)$ de tal problema.

Capítulo 5

Conclusiones

Luego del estudio realizado sobre la controlabilidad del modelo semilineal parabólico

$$y' - \Delta y + f(y) = h, \tag{5.1}$$

podemos concluir lo siguiente:

1. El problema de valor inicial y frontera asociado a (5.1) es exactamente controlable sobre $L^2(\Omega)$.

2. Para cada par de datos y_0, $y_1 \in L^2(\Omega)$, es posible encontrar una función control $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ que conduce el estado $y(x,t)$ desde el estado inicial y_0 al estado final y_1 en un tiempo T fijado previamente.

3. La demostración del teorema de controlabilidad 2.1 no es constructiva con respecto a la función de control, en el sentido que no permite obtener explícitamente tal control.

4. El método de la expansión del dominio nos permite levantar la condición

restrictiva (2.29), es decir

$$1 + \frac{\ell^2}{2\ell + 1}(1 - e^{(2\ell+1)T}) > 0.$$

5. El método de la expansión del dominio podría ser aplicado a otros problemas en los que restricciones técnicas como (2.29) limitan o reducen el ámbito de validez o aplicabilidad de los resultados.

6. Al perturbar la ecuación (5.1) y considerar $y' - \Delta y + \varepsilon f(y) = h$ obtenemos un control $h_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. El límite débil de la sucesión de controles $\{h_\varepsilon\}$ así obtenida resulta ser un control para el sistema lineal

$$\begin{cases} y' - \Delta y = h & , \text{ en } Q \\ y(x,0) = y^0 & , \text{ en } \Omega \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma. \end{cases}$$

7. El teorema de control 2.1 es aplicable a diversos problemas semilineales parabólicos provenientes de la biología y otras áreas, como el modelo de Fisher para el crecimiento de una población y sus variantes.

Bibliografía

[1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Acad. Press, 1975.

[2] Bartle, R., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley & Sons, New York, 1995.

[3] Barenblatt, G. y Zeldovich, Y., On stability of flame propagation. *Prikl Mat Mekh*,21: 856-9, Rusia 1957.

[4] Brezis, H., *Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones,* Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[5] Cabanillas Z., V. R. Controlabilidad Aproximada sobre la Frontera para la Ecuación Semilineal del Calor. *PESQUIMAT*, Vol VIII, N°2, pp.13-28, 2005.

[6] Cabanillas Z., V. R. Controlabilidad Exacta Interna para la Ecuación Semilineal del Calor. *PESQUIMAT*, Vol XI, N°1, pp.21-30, 2008.

[7] Cosner, C., *Reaction-Diffusion Equations and Ecological Modeling*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, 2008.

[8] Evans, L., *Partial Differential Equations.* Providence: American Mathematical Society, 1998.

[9] Fabre, C., Puel, J.P., y Zuazua, E., Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* , 125A, pp. 31-61, 1995.

[10] Fernández-Cara E. y Zuazua, E., *Control Theory :* History, mathematical achievements and perspectives. *Boletín SEMA*, 26, 2003, pp. 79-140.

[11] Fisher, R.A. The wave of avance of avantageous genes. *Annals of Eugen.* 7, 355-369, 1937.

[12] Kierstead, H. y Slobodkin L.B., The size of water masses containing plankton looms. *J Mar Res.* 12:141–147, 1953.

[13] Kolmogorov, A. N., I. Petrovskii and N. Piscounov., *A study of the diffusión equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem.* In V. M, Tikhomirov, editor, *Selected Works of A. N. Kolmogorov* I, pages 248-270. Kluwer 1991. Translate by V. M. Volosov from Bull. Moscow Univ., Math. Mech. 1,1-25,1937. Universidad de Málaga, pp. 77-87, 1991.

[14] Lions, J. L., Remarques sur la contrôlabilité aprochée, *Jornadas Hispano-Francesas so bre Control de Sistemas Distribuidos.* Universidad de Málaga, pp. 77-87, 1991.

[15] Lions, J. L., *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués.* Vol 1, 2, Masson, RMA 8&9, Paris, 1988.

[16] Liu, W. y Williams, G., *Exact Internal Controllability for the Semilinear Heat Equation , J. Mat. Anal. and Appl.*, 211, 258-272, 1997.

[17] Logan, J. D., *Applied Mathematics.*, 2nd. ed., John Wiley Sons, Inc, New York, 1997.

[18] Medeiros, L. A., *Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogéneos.* Instituto de Matemática, UFRJ, 1999.

[19] Murray, J. D., *Mathematical Biology.* Springer-Verlag, New York, 1980.

[20] Nagumo J., Arimoto S., and Yoshizawa S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon.* University of Tokyo, 1962.

[21] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, Applied Math. Sc. vol.44, New York, 1983.

[22] Pao, C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations.* Plenum Press, New York, 1992.

[23] Skellam, J.G., Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* 38:196–218, 1951.

[24] Vakulenko, S. y Volper, V., Generalized travelling waves for perturbed monotone reaction-diffusion systems *Nonlinear Anal.*, 46, 57-76, 2001.

[25] Volpert , V. y Petrovskii, S. Reaction - diffusion waves in biology. *Physics of Life Reviews.* Elsevier, 267 - 310, 2009.

[26] Troltzsch, F., *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications.* American Math. Society, Providence, volume 112, 2010.

[27] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis*, vols. II/A,II/B, Springer-Verlag, 1990.